

場の量子論

『ウィキペディア (Wikipedia)』より

量子力学は、粒子の「位置と運動量」を基本変数に選んだ量子論である。しかし、古典的に場であったもの（電磁場など）だけでなく、古典的には粒子とみなされてきた物理系であっても、「場」を基本変数にしたほうが良く、適用範囲も広いことが判っている。スピンの関わるような物理系がその典型である。「位置と運動量」を基本変数としてもスピンを記述することができないため、量子力学でスピンの関わるような状況では、スピンを新たな基本変数としてつけ加えることをする。しかし「位置と運動量」ではなく「場」を基本変数として電子を扱うとスピンを自然に記述できる。

「場」を基本変数とする量子論を場の量子論と呼ぶ。量子力学は、場の量子論を低エネルギー状態に限った場合の近似理論である。また量子論をフォック空間で考えることを第二量子化と呼ぶこともある。

第二量子化という名前の由来について

場の量子化は、決して「二度目の」量子化ではない。「第二量子化」という言葉は、場の量子論が作られていく歴史的過程において、量子化の本質が見えず、「一度目の量子化が有限自由度の量子力学で、これをもう一度量子化したものが場の量子論である」という誤解に由来するものである。古典的には粒子であるもの（例えば電子）に対して、「場を基本変数にしてみよう」という動機が、「座標表示の波動関数が場のようにも見えたから」だった。しかし言うまでもなく、「基本変数である場」と「状態ベクトルの座標表示である波動関数」とは全くの別物である。[

量子場を導入する2つの方法

量子場を導入する方法として2つの方法がある。

①古典場を量子化する方法

このとき波動場を関数ではなく、正準交換関係や正準反交換関係といった「ある種の代数的関係」を満たす演算子に読み替える。

②量子力学における同種粒子の統計性や不可弁別性に注目し、真空から粒子が生成したり、粒子が消滅する空間（フォック空間）から出発する方法である。

量子論では同種の粒子は全く区別がつかない。N個の同種粒子から成る系は、等価であるが一見異なった2つの方法で記述できるということ。

第一の方法では、N粒子系のヒルベルト空間を構成するために、1粒子ヒルベルト空間のN個のテンソル積を考え、それを粒子の入れ替えに対しボゾン系では完全対称なもの、フェルミオン系では非対称なものへ制限する。このような多体系の取り扱いを第一量子化とよぶ。同種粒子の不可弁別性のため、同種粒子を含む系の状態ベクトルや物理量は一定の対称性を持つものに限られる。その対称性は、基本変数を粒子の「位置と運動量」ととった量子論では少し不自然にも見える形で現れる（波動関数の対称性、反対称性など）。この不自然さは、個々の粒子に別々の「位置と運動量」を割り当てるのは粒子が区別できることが大前提であるのに、区別ができない粒子にそれをやってしまったことによる。N粒子系を記述する多体波動関数は、系の粒子がフェルミ粒子なら任意に選んだ2粒子の交換により多体波動関数の符号が変わる（反対称）。一方、系の粒子がボース粒子なら2粒子の交換に対し符号は変わらない（対称）。

第二の方法では、粒子の生成消滅演算子を考え、粒子が1つもない状態に生成演算子をN個作用させた状態としてN体系を記述する。このような多体系の取り扱いを第二量子化と呼ぶ。第二量子化では基本変数を「場」とその共役運動量にとることで、同種粒子の区別がつかないことや状態ベクトルや物理量の対称性なども自動的に理論に組み込まれ、すっきりしたものになる。

ここでは、後者の方法を軸に「場の量子論」をみていく。

場の正準方程式

準備

偏微分

$f(x, y, \dots)$ において、他の変数を固定しておいて、1つの変数の微分だけをとる。

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \dots \quad \text{下図においては、全微分の断面にあらわれる接線}$$

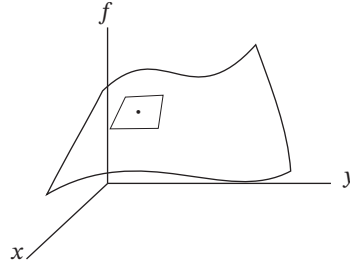
全微分

$f(x, y, \dots)$ において、接平面 (右図) をとる。

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \dots$$

$f(x(t), y(t), \dots)$ となるとき、

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \dots$$



汎関数微分

$F(u(x))$ において、ある x 点での u の微分をとる。

$$\frac{\delta F(u(x))}{\delta u(x)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(u(x) + \epsilon \delta(x'-x)) - F(u(x))}{\epsilon} \quad \delta(x'-x) \text{ はディラックのデルタ関数}$$

同様に、 $\frac{\delta^2 F(u)}{\delta u(x_1) \delta u(x_2)}$, $\frac{\delta^2 F(u)}{\delta u(x)^2}$ や、

多くの関数の汎関数について、 $\frac{\delta F(u_\alpha, u_\beta, \dots)}{\delta u_\alpha(x)}$, $\frac{\delta^2 F(u_\alpha, u_\beta, \dots)}{\delta u_\alpha(x_1) \delta u_\beta(x_2)}$ などが定義される。

粒子からなる系が、 q_i, p_i, t であらわせるように、場は、 q_i に対応するものとしてすべての点 \mathbf{r} における振幅 $\psi(\mathbf{r}, t)$ を採用する。これは無限個の粒子からなる系に相当する。(無限の自由度)

$$q_i \rightleftharpoons \psi, \quad p_i \rightleftharpoons \pi \quad (\pi \text{ については後述})$$

時間微分係数について

粒子の古典論では、時間についての全微係数と偏微係数は、座標、運動量、時間のある関数 $F(q_i, p_i, t)$ に関連して定義されるものであった。そしてこれらの2種の微係数の関係は、

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}$$

で与えられている。

一方、場の古典論では、 q_i に対応するものは ψ で、定義する時間微係数は $\partial\psi/\partial t$ だけであり、粒子の古典論の場合の \dot{q}_i との類推からそれを $\dot{\psi}$ であらわして用いている。(つまり、 $d\psi/dt$ と $\partial\psi/\partial t$ は区別することができず、いずれも $\dot{\psi}$ であらわせるということ。)

ただし、汎関数 $F(\psi, \pi, t)$ は、 dF/dt と $\partial F/\partial t$ は区別しなければならないので注意が必要である。

同じ事情が、場の量子論についても生じてくる。

部分積分

計算においては部分積分を頻繁に利用することになるが、ここでは積分範囲が空間全体にわたること、及び波動関数は無限遠では0となるという仮定を用いることになる。

ラグランジュの方程式

粒子のラグランジアン $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ 相対性理論 [page13](#) 参照

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} q_i \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \quad \text{部分積分} \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \delta q_i dt
 \end{aligned}$$

これにより (変分 $\delta S = 0$ より)、 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

場のラグランジュの方程式をこのような形にもっていくことを考える。

場のラグランジアン $L = \int \mathbf{L}(\psi, \nabla\psi, \dot{\psi}) d^3r$ \mathbf{L} はラグランジアン密度

$$\begin{aligned}
 \delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt \\
 &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \int \mathbf{L} d^3r dt \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \int \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \psi} \delta \psi + \sum_{x,y,z} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial (\partial\psi/\partial x)} \frac{\partial(\delta\psi)}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\psi}} \frac{\partial(\delta\psi)}{\partial t} \right) d^3r dt \quad \text{第2、3項には部分積分を適用して、} \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \int \left\{ \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \psi} - \sum_{x,y,z} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial (\partial\psi/\partial x)} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\psi}} \right) \right\} \delta \psi d^3r dt \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \int \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\psi}} \right) \right) \delta \psi d^3r dt
 \end{aligned}$$

ただし、 $\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \psi} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \psi} - \sum_{x,y,z} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial (\partial\psi/\partial x)} \right) \\ \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\psi}} \end{cases}$ 下の計算参照

これにより、 $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \psi} = 0$

計算 //////////////////////////////////////

質点系の場合、ラグランジュの方程式は、 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

当然のこととして、この計算では $\frac{\partial q_j}{\partial q_i} = \delta_{ij}$, $\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_i} = \delta_{ij}$ などを用いることになる。

これに対して、場の場合は、

$$\frac{\partial \psi(x)}{\partial \psi(x')} = \delta_{(x-x')}, \quad \frac{\partial \dot{\psi}(x)}{\partial \dot{\psi}(x')} = \delta_{(x-x')} \text{ を用いることになる。} \quad \textcircled{1}$$

次の式が成り立つ。

$$\int f(x) \delta_{(x-x')} dx = f(x') \quad \textcircled{2}$$

$$\frac{\partial f(\psi(x))}{\partial \psi(x')} = \frac{\partial f(\psi(x))}{\partial \psi(x)} \frac{\partial \psi(x)}{\partial \psi(x')} = \frac{\partial f(\psi(x))}{\partial \psi(x)} \delta_{(x-x')} \quad \textcircled{3}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \psi(x')} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \psi(x')} \frac{\psi(x+dx) - \psi(x)}{dx} \quad (\text{と考えると計算する}) \\
 &= \frac{\delta_{(x+dx-x')} - \delta_{(x-x')}}{dx} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \delta_{(x-x')} \quad \textcircled{4}
 \end{aligned}$$

$\frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \psi}$ などはない。すなわち、 $\frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \psi} = \frac{\partial}{\partial \psi(x')} \frac{\psi(t+dt) - \psi(t)}{dt}$ となって計算が定義できない。

以上から、

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \psi} = \frac{\partial}{\partial \psi} \int \mathbf{L} dx = \int \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \psi} + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial (\partial\psi/\partial x)} \frac{\partial(\partial\psi/\partial x)}{\partial \psi} \right) dx \quad \textcircled{3} \quad \frac{\partial(\partial\psi/\partial x)}{\partial \psi} = \frac{\partial}{\partial x} \delta_{(x-x')} \text{ より、}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \psi} \delta_{(x-x')} + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial(\partial\psi/\partial x)} \frac{\partial}{\partial x} \delta_{(x-x')} \right) dx \quad \text{第2項には部分積分を使って、} \\
 &= \int \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \psi} \delta_{(x-x')} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial(\partial\psi/\partial x)} \delta_{(x-x')} \right) dx \\
 &= \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial(\partial\psi/\partial x)} \quad \int f(x) \delta_{(x-x')} dx = f(x') \text{ を用いた。} \\
 \frac{\delta \mathbf{L}}{\delta \dot{\psi}} &= \frac{\delta}{\delta \dot{\psi}} \int \mathbf{L} dx = \int \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\psi}} \frac{\delta \dot{\psi}}{\delta \dot{\psi}} \right) dx = \int \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\psi}} \delta_{(x-x')} \right) dx \\
 &= \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\psi}} \\
 &////////////////////////////////////
 \end{aligned}$$

ハミルトンの方程式

粒子の場合

$p_i = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_i}$ で定義される力学量を定義する (q_i に共役な運動量)。

運動方程式は、 $\dot{p}_i = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial q_i}$ となる。(ラグランジュの方程式参照)

次に、 $H(q_i, p_i, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t)$ で定義される関数を導入する。

これ (左辺) は、 H が q_i, p_i, t の関数として書きあらわしていることを示している。

$$dH = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

一方、右辺に着目して、 H を q_i, \dot{q}_i, p_i, t の関数と考え、

$$\begin{aligned}
 dH &= \sum_i (p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i) - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t} dt \\
 &= \sum_i (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t} dt
 \end{aligned}$$

比較すると、

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t}$$

この3つの関係式のうち、最初の2つをまとめてハミルトンの正準方程式とよぶ。最後の1つは、ラグランジアンが直接時刻 t を含む場合でない限り 0 になってしまう。

場の場合

$\pi = \frac{\delta \mathbf{L}}{\delta \dot{\psi}} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\psi}}$ で定義される ψ に共役な運動量を導入する。

運動方程式は、 $\dot{\pi} = \frac{\delta \mathbf{L}}{\delta \psi}$ となる。(ラグランジュの方程式参照)

次に、 $H = \pi \dot{\psi} - \mathbf{L}(\psi, \nabla\psi, \dot{\psi})$ で定義される量を導入する。(ハミルトニアン密度)

$$H(\psi, \pi) = \int \mathbf{H} d^3r$$

$$dH = \int \left(\frac{\delta \mathbf{H}}{\delta \psi} d\psi + \frac{\delta \mathbf{H}}{\delta \pi} d\pi \right) d^3r$$

一方、 H を $\psi, \dot{\psi}, \pi$ の関数と考え、

$$\begin{aligned}
 dH &= \int (\dot{\psi} d\pi + \pi d\dot{\psi} - d\mathbf{L}) d^3r = \int (\dot{\psi} d\pi + \pi d\dot{\psi} - \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial(\partial\psi/\partial x)} d(\partial\psi/\partial x) + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\psi}} d\dot{\psi} \right)) d^3r \\
 &= \int (\dot{\psi} d\pi + \pi d\dot{\psi} - \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial(\partial\psi/\partial x)} \frac{\partial d\psi}{\partial x} + \pi d\dot{\psi} \right)) d^3r \\
 &= \int (\dot{\psi} d\pi - \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial(\partial\psi/\partial x)} \frac{\partial d\psi}{\partial x} \right)) d^3r = \int (\dot{\psi} d\pi - \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \psi} d\psi - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial(\partial\psi/\partial x)} d\psi \right)) d^3r \\
 &= \int (\dot{\psi} d\pi - \frac{\delta \mathbf{L}}{\delta \psi} d\psi) d^3r \\
 &= \int (\dot{\psi} d\pi - \dot{\pi} d\psi) d^3r
 \end{aligned}$$

比較すると、

$$\dot{\psi} = \frac{\partial H}{\partial \pi}, \quad \dot{\pi} = -\frac{\partial H}{\partial \psi}$$

$A(q_i, p_i, t)$ を古典力学における力学量とする。

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) \\ &= \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \\ &= \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\} \end{aligned}$$

同様に、汎関数 $F(\psi, \pi, t) = \int \mathbf{F}(\psi, \pi, \nabla\psi, \nabla\pi, t) d^3r$

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \int \left(\frac{\delta F}{\delta \psi} \dot{\psi} + \frac{\delta F}{\delta \pi} \dot{\pi} \right) d^3r \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} + \int \left(\frac{\delta F}{\delta \psi} \frac{\delta H}{\delta \pi} - \frac{\delta F}{\delta \pi} \frac{\delta H}{\delta \psi} \right) d^3r \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} \end{aligned}$$

場の量子化

交換関係

$$[\hat{\psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}(\mathbf{r}', t)] = [\hat{\pi}(\mathbf{r}, t), \hat{\pi}(\mathbf{r}', t)] = 0$$

$$[\hat{\psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\pi}(\mathbf{r}', t)] = i\hbar \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

ハイゼンベルクの運動方程式

$$\frac{d\hat{F}}{dt} = \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [\hat{F}, \hat{H}] \quad \text{page9 参照}$$

これより、

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{\psi}, \hat{H}] = \frac{\delta H}{\delta \pi} \quad \text{前にも規定したように、場の } d\psi/dt \text{ と } \partial\psi/\partial t \text{ は区別することができずこれを } \dot{\psi} \text{ であらわした。}$$

$$\frac{\partial \hat{\pi}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{\pi}, \hat{H}] = -\frac{\delta H}{\delta \psi}$$

生成演算子と消滅演算子

ここではまず、生成演算子と消滅演算子をおさえておくことにする。そのほうがのちの展開が流れやすくなるからである。

以前、「角運動量の一般的扱い」(page24) で「3つの演算子 $\hat{j}_x, \hat{j}_y, \hat{j}_z$ の交換関係を与えるだけで、いったいどれだけのことが言えるのか? 驚くことにスピンを含むすべての角運動量状態の記述が可能となります。量子力学がどのような原理・数学的基礎を土台に持つのか垣間見ることができます。」といった一文を引用したが、同じような量子力学の驚くべき絶妙な構造が、この生成演算子と消滅演算子についても見えてくるはずである。

Bose 演算子

定理

ある演算子 \hat{a} と、そのエルミート共役 \hat{a}^\dagger が、交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ を満たすとき、

$\hat{N} \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a}$ の固有値は、 $0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ である。

証明

まず、演算子 \hat{N} はエルミートなので、その固有値は実数である。また、 \hat{N} の形からそれらは負ではない。

\hat{N} の固有値を n 、それに対する固有ベクトルを $|n\rangle$ であらわすと、

$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$ n は実数で、 $n \geq 0$ しかし、 n が整数であるかどうかはわからない

$[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}$ より、

$[\hat{N}, \hat{a}]|n\rangle = -\hat{a}|n\rangle$

$\hat{N}\hat{a}|n\rangle - n\hat{a}|n\rangle = -\hat{a}|n\rangle$

$\hat{N}\hat{a}|n\rangle = (n-1)\hat{a}|n\rangle$

すなわち、 $\hat{a}|n\rangle$ も \hat{N} の固有ベクトルで、固有値は $n-1$ となる。

これをくり返すと、

$\hat{N}\hat{a}\hat{a}\dots\hat{a}|n\rangle = (n-m)\hat{a}\hat{a}\dots\hat{a}|n\rangle$
 m 個 m 個

$\hat{a}\hat{a}\dots\hat{a}|n\rangle$ も \hat{N} の固有ベクトルで、固有値は $n-m$

ところが \hat{N} の固有値は、負にはなりえないから、 $n \geq m$

最大の m を m_0 とすると、

$$\begin{cases} \hat{a}\hat{a}\dots\hat{a}|n\rangle \neq 0 & \text{ m_0 個} \\ \hat{a}\hat{a}\dots\hat{a}|n\rangle = 0 & \text{ m_0+1 個} \quad \ast \end{cases}$$

下の \ast 式が成りたたなければ、 \hat{N} には負の固有値があることになる。

左から \hat{a}^\dagger を掛けると、

$$\hat{a}^\dagger \hat{a}\hat{a}\dots\hat{a}|n\rangle = \hat{N} \hat{a}\hat{a}\dots\hat{a}|n\rangle = (n-m) \hat{a}\hat{a}\dots\hat{a}|n\rangle = 0$$
 m_0+1 個 m_0 個

すなわち、 $n = m_0$

m_0 は負でない整数であるから、 n も負でない整数となる。

$$\hat{a}\hat{a}\dots\hat{a}|n\rangle \equiv |0\rangle \quad (\hat{N} \text{ の固有値は } 0) \quad \text{とおくと、} \quad \hat{a}|0\rangle = 0 \quad \leftarrow \ast \text{より}$$
 m_0 個

したがって、 $\hat{N}|0\rangle = 0|0\rangle$

これまで、固有値が 0 になるまで減少させてきたが、次に 0 から増加させてみる。

交換関係より、 $\hat{N}\hat{a}^\dagger|0\rangle = \hat{a}^\dagger(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1)|0\rangle = \hat{a}^\dagger|0\rangle$

これを続けると、 $\hat{N}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle = n(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$ が成りたつことがわかる。

$$|n\rangle = (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle$$

$$\text{規格化しておく、}|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle \quad \leftarrow \langle n|n\rangle = \langle 0|(\hat{a})^n (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle = n! \text{ より}$$

まとめておくと、演算子 \hat{a} は \hat{N} の固有値を1つだけ減らすので消滅演算子、演算子 \hat{a}^\dagger は \hat{N} の固有値を1つだけ増やすので生成演算子とよばれる。 $|0\rangle$ は \hat{N} の最低の固有値に属し、これ以上 \hat{N} の固有値を下げるのできない状態だからしばしば真空とよばれる。(場から粒子が生成したり、消滅したりする場面がイメージできるだろう。)

Fermi 演算子

反交換関係 $\{\hat{c}, \hat{c}^\dagger\} \equiv \hat{c} \hat{c}^\dagger + \hat{c}^\dagger \hat{c} = 1$, $\{\hat{c}, \hat{c}\} = 0$ ($\hat{c} \hat{c} = 0$) を満たす演算子があって、 $\hat{N} \equiv \hat{c}^\dagger \hat{c}$ を定義する。

$$[\hat{N}, \hat{c}] = -\hat{c} \quad \text{①}$$

$$[\hat{N}, \hat{c}^\dagger] = \hat{c}^\dagger \quad \text{②}$$

\hat{N} の固有値 n に属する固有ベクトルを $|n\rangle$ とすると ($\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$)、前と同様にして、

$$\hat{N} \hat{c} |n\rangle = (n-1) \hat{c} |n\rangle \quad \leftarrow \text{①より}$$

$$\hat{N} \hat{c}^\dagger |n\rangle = (n+1) \hat{c}^\dagger |n\rangle \quad \leftarrow \text{②より}$$

すなわち、 \hat{c} と \hat{c}^\dagger は、の固有値を1つだけ増やしたり減らしたりする。

定理 \hat{N} の固有値は、0か1のみである。

証明

$$\hat{N} \hat{N} = \hat{c}^\dagger \hat{c} \hat{c}^\dagger \hat{c} = \hat{c}^\dagger (-\hat{c}^\dagger \hat{c} + 1) \hat{c} = \hat{c}^\dagger \hat{c} = \hat{N} \quad \leftarrow \{\hat{c}, \hat{c}^\dagger\} = 1, \{\hat{c}, \hat{c}\} = 0 (\hat{c} \hat{c} = 0)$$

$$\text{すなわち、} \hat{N}(\hat{N}-1) = 0$$

よって、 \hat{N} の固有値は、0か1のみである。

\hat{N} の固有値 $n = 0$ に属する固有ベクトルを $|0\rangle$ であらわすと、 $\hat{c}|0\rangle = 0$ である。

$$\because \hat{N} \hat{c} |n\rangle = (n-1) \hat{c} |n\rangle \text{ より、}$$

$$\hat{N} \hat{c} |0\rangle = -\hat{c} |0\rangle$$

$\hat{c} |0\rangle$ が0でないと \hat{N} が負の固有値をもつことになる。

当然、 \hat{N} の固有値 $n = 1$ に属する固有ベクトルは $\hat{c}^\dagger |0\rangle$ である。

$$\hat{N} \hat{c}^\dagger |0\rangle = \hat{c}^\dagger |0\rangle$$

$\langle 0|0\rangle = 1$ と規格化しておく、 $\hat{c}^\dagger |0\rangle$ も規格化される。

拡張

場の量子論では上述の代数を駆使することになるが、実際の粒子は運動量やスピン … などをもっているから、ただ1つの \hat{a} (およびそのエルミート共役 \hat{a}^\dagger) だけではなく、多くの \hat{a}_i ($i = 1, 2, \dots$) まで拡張しておいたほうがよさそうである。

Bose 演算子

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}$$

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0$$

$$\hat{N}_i \equiv \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \text{ の固有値は、 } n_i = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$$

$$\text{規格化直交ベクトルは、 } |n_1, n_2, \dots\rangle = \prod_i \frac{1}{\sqrt{n_i!}} (\hat{a}_i^\dagger)^{n_i} |0\rangle$$

ただし $|0\rangle$ は、

$$\hat{N}_i |0\rangle = 0$$

$$\hat{a}_i |0\rangle = 0$$

$$\langle 0|0\rangle = 1$$

場の量子論では、演算子 \hat{N}_i がラベル i (たとえば運動量とかスピン) をもつ Bose 統計に従う粒子の数をあらわす演算子になるので、それを i 状態にある粒子数演算子とよぶ。

Fermi 演算子

$$\{\hat{c}_i, \hat{c}_j^\dagger\} = \delta_{ij}$$

$$\{\hat{c}_i, \hat{c}_j\} = \{\hat{c}_i^\dagger, \hat{c}_j^\dagger\} = 0$$

$$\hat{N}_i \equiv \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_i \text{ の固有ベクトルは、 } |n_1, n_2, \dots\rangle = (\hat{c}_1^\dagger)^{n_1} (\hat{c}_2^\dagger)^{n_2} \dots |0\rangle \quad *$$

ここで n_1, n_2, \dots は、0 または 1 しかとらない数である。そのために規格化因子は不要になる。

※ 対称性についての注意

固有ベクトル $|n_1, n_2, \dots\rangle = \prod_i \frac{1}{\sqrt{n_i!}} (\hat{a}_i^\dagger)^{n_i} |0\rangle$ においては、交換関係 $[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0$ のために生成演算子の順序をどう変えても同じである (ラベルの交換に対して対称)。

一方、 $|n_1, n_2, \dots\rangle = (\hat{c}_1^\dagger)^{n_1} (\hat{c}_2^\dagger)^{n_2} \dots |0\rangle$ においては、 \hat{c}_i^\dagger が反交換関係 $\{\hat{c}_i, \hat{c}_j\} = \{\hat{c}_i^\dagger, \hat{c}_j^\dagger\} = 0$ をとるため、ラベルの交換に対して反対称になる。

たとえば、 $\hat{c}_1^\dagger \hat{c}_2^\dagger \hat{c}_3^\dagger \hat{c}_4^\dagger \hat{c}_5^\dagger |0\rangle$ において 1 と 5 を交換すると、

$$\hat{c}_5^\dagger \hat{c}_2^\dagger \hat{c}_3^\dagger \hat{c}_4^\dagger \hat{c}_1^\dagger |0\rangle = -\hat{c}_1^\dagger \hat{c}_2^\dagger \hat{c}_3^\dagger \hat{c}_4^\dagger \hat{c}_5^\dagger |0\rangle \text{ となる。}$$

つまり、ラベルの順序まで指定しておかないと正確な記述ではない。そこで、ラベルの小さい順に左から並べると約束しておく。

●フォック空間

規格化直交ベクトル $|n_1, n_2, \dots\rangle = \prod_i \frac{1}{\sqrt{n_i!}} (\hat{a}_i^\dagger)^{n_i} |0\rangle$ や $|n_1, n_2, \dots\rangle = (\hat{c}_1^\dagger)^{n_1} (\hat{c}_2^\dagger)^{n_2} \dots |0\rangle$ で張られる空間を Fock (フォック) 空間 という。

●生成・消滅演算子

ここで見てきた生成・消滅演算子は、特別なものであってこれ以外にもいろいろな生成・消滅演算子が考えられる。たとえば、角運動量で見た \hat{j}_\pm (page24 参照) などもその一つである。

場の量子化——いくつかの例

調和振動子の場合 (準備運動として)

調和振動子の運動方程式は、 $\ddot{q} = -\omega^2 q$

この方程式は、 $\dot{q} = P$, $\dot{p} = -\omega^2 q$ と同等である。

そこで、これが、ハイゼンベルクの運動方程式 $\dot{\hat{q}} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{q}, \hat{H}]$, $\dot{\hat{p}} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{p}, \hat{H}]$ と一致するように、 \hat{q} , \hat{p} の演算子と \hat{H} とを同時に決めてみると、

解1)

$$\begin{cases} \hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2) \\ [\hat{p}, \hat{q}] = -i\hbar \end{cases} \quad \Rightarrow \text{Bose 粒子}$$

これらは、

$$\dot{\hat{q}} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{q}, \hat{H}] = \frac{1}{2i\hbar} ([\hat{q}, \hat{p}] \hat{p} + \hat{p} [\hat{q}, \hat{p}]) = \hat{p}$$

$$\dot{\hat{p}} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{p}, \hat{H}] = \frac{1}{2i\hbar} \omega^2 ([\hat{p}, \hat{q}] \hat{q} + \hat{q} [\hat{p}, \hat{q}]) = -\omega^2 \hat{q} \quad \text{となって、運動方程式と一致する。}$$

ハミルトニアン \hat{H} は、固有値 $\frac{1}{2}\hbar\omega$, $(1 + \frac{1}{2})\hbar\omega$, $(2 + \frac{1}{2})\hbar\omega$, $(3 + \frac{1}{2})\hbar\omega$, …… をもつ。

$\frac{1}{2}\hbar\omega$ は零点エネルギー。

ここで、

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\sqrt{\omega} \hat{q} + i\frac{1}{\sqrt{\omega}} \hat{p})$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\sqrt{\omega} \hat{q} - i\frac{1}{\sqrt{\omega}} \hat{p}) \quad \text{とおくと、}$$

$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ が得られる。これは先に見た、Bose 演算子である。

解2)

$$\begin{cases} \hat{H} = i\omega \hat{q} \hat{p} \\ \{\hat{p}, \hat{q}\} \equiv \hat{p} \hat{q} + \hat{q} \hat{p} = 0 \\ \hat{p}^2 = \frac{\hbar\omega}{2}, \quad \hat{q}^2 = \frac{\hbar}{2\omega} \end{cases} \quad \Rightarrow \text{Fermi 粒子}$$

これらも、

$$\dot{\hat{q}} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{q}, \hat{H}] = \frac{\omega}{\hbar} (\hat{q} \hat{q} \hat{p} - \hat{q} \hat{p} \hat{q}) = \frac{2\omega}{\hbar} \hat{q}^2 \hat{p} = \hat{p}$$

$$\dot{\hat{p}} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{p}, \hat{H}] = \frac{\omega}{\hbar} (\hat{p} \hat{q} \hat{p} - \hat{q} \hat{p} \hat{p}) = -\frac{2\omega}{\hbar} \hat{p}^2 \hat{q} = -\omega^2 \hat{q} \quad \text{となって、運動方程式と一致する。}$$

また、 $(\hat{H} - \frac{\hbar\omega}{2})(\hat{H} + \frac{\hbar\omega}{2}) = 0$ となって、

\hat{H} の固有値は、 $\frac{\hbar\omega}{2}$ と $-\frac{\hbar\omega}{2}$ の2つであることがわかる。

ここで、

$$\hat{c} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\sqrt{\omega} \hat{q} + i\frac{1}{\sqrt{\omega}} \hat{p})$$

$$\hat{c}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\sqrt{\omega} \hat{q} - i\frac{1}{\sqrt{\omega}} \hat{p}) \quad \text{とおくと、}$$

反交換関係 $\{\hat{c}, \hat{c}^\dagger\} = 1$, $\{\hat{c}, \hat{c}\} = 0$ ($\hat{c} \hat{c} = 0$) を得る。これは先に見た、Fermi 演算子である。

この他にも、まだいろいろな可能性があるが、あまり物理的意味がないので省略。

この調和振動子の例からもわかるように、量子化の操作において、通常のように正準座標 q と正準運動量 p との間に交換関係 $[\hat{p}, \hat{q}] = -i\hbar$ を仮定するだけでは、枠が狭すぎることがわかる。場の量子論を議論する場合にも基本的に同様であって、ハイゼンベルクの運動方程式から出発するのが妥当だと考えられる。

とはいえ、一般的には古典力学における正準形式を頼りにして \hat{H} を求めるわけだが、古典正準形式が可能であっても、いつでもそれを量子力学系に移すことができるとは限らない。とくに場の場合は、自由場の部分が波の性質をもち、伝播していくような性質をもっていないと量子化はさらに難しくなると思われる。 \hat{H} の具体的な形は、ハイゼンベルクの運動方程式が場の方程式に一致するという条件から定める。それは、ユニークに決まるとはかぎらないが、物理的に意味のあるように決めるのである。

シュレディンガー方程式の量子化

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(r, t) \psi$$

$$L = i\hbar \psi^* \dot{\psi} - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi^* \nabla \psi - V \psi^* \psi \quad (\text{ラグランジアン密度}) \text{をとると、}$$

$$\psi \text{ の変分は、} i\hbar \dot{\psi}^* = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^* + V \psi^*$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1 + i\psi_2) \quad \psi_1, \psi_2 \text{ は実}$$

$$\psi^* \text{ の変分は、} i\hbar \dot{\psi} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V \psi$$

ψ_1 と ψ_2 とを独立に変分して得られるラグランジアン方程式は、 ψ と ψ^* とを独立に変分して得られる方程式と同等である。

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = i\hbar \psi^*$$

$$\tilde{\pi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^*} = 0$$

ハミルトン密度

$$H = \pi \dot{\psi} - L = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi^* \nabla \psi + V \psi^* \psi = -\frac{i\hbar}{2m} \nabla \pi \nabla \psi - \frac{i}{\hbar} V \pi \psi$$

ハミルトンの運動方程式

$$\dot{\psi} = \frac{\partial H}{\partial \pi} = \frac{\partial H}{\partial \pi} - \sum_{x,y,z} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial (\partial \pi / \partial x)} \right) = -\frac{i}{\hbar} V \psi + \frac{i\hbar}{2m} \nabla^2 \psi \quad \text{上の } \psi^* \text{ の変分と同じ}$$

$$\dot{\pi} = -\frac{\partial H}{\partial \psi} = -\frac{\partial H}{\partial \psi} + \sum_{x,y,z} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial (\partial \psi / \partial x)} \right) = -\frac{i}{\hbar} V \pi + \frac{i\hbar}{2m} \nabla^2 \pi \quad \text{上の } \psi \text{ の変分と同じ}$$

page43-44

量子論方程式

$$\hat{H} = \int \hat{H} d^3r = \int \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \hat{\psi}^\dagger \nabla \hat{\psi} + V \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} \right) d^3r \quad \psi^* \text{ は } \hat{\psi}^\dagger \text{ となる。 } \hat{\psi} \text{ のエルミート共役}$$

量子化条件

$$[\hat{\psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}(\mathbf{r}', t)] = [\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}', t)] = 0$$

$$[\hat{\psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}', t)] = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

ハイゼンベルクの運動方程式を使って、

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}(t)}{\partial t} = [\hat{\psi}(t), \hat{H}] = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \hat{\psi}(t) + V \hat{\psi}(t) \quad \text{計算略}$$

上のシュレディンガー方程式やハミルトンの運動方程式と対応。

量子化

$$\hat{N} = \int \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} d^3r \text{ とおくと、} \quad \hat{N} \text{ はエルミート演算子となる。 (粒子の総数を表すようなもの)}$$

$$i\hbar \frac{\partial \hat{N}(t)}{\partial t} = [\hat{N}(t), \hat{H}] = 0$$

⌊ 計算略

演算子 $\hat{\psi}$ を完全直交関数系 $u_k(\mathbf{r})$ (空間座標に関する数値関数) に展開

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = \sum_k \hat{a}_k(t) u_k(\mathbf{r}) \quad u_k(\mathbf{r}) \text{ で展開し, } \hat{a}_k \text{ を変数とみなす。}$$

$$\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) = \sum_k \hat{a}_k^\dagger(t) u_k^*(\mathbf{r})$$

$$\left. \begin{aligned} [\hat{a}_k(t), \hat{a}_l^\dagger(t)] &= \delta_{kl} \\ [\hat{a}_k(t), \hat{a}_l(t)] &= [\hat{a}_k^\dagger(t), \hat{a}_l^\dagger(t)] = 0 \end{aligned} \right\} \text{証明略 (シュレディンガー波動関数の量子化条件より)}$$

これから、

$$\hat{N}(t) = \sum_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k = \sum_k \hat{N}_k \quad \text{ただし, } \hat{N}_k = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$$

\hat{N}_k 同士はすべて互いに交換可能、したがって、同時に対角化できる。

この交換関係 $[\hat{a}_k, \hat{a}_l^\dagger] = \delta_{kl}$ や \hat{N}_k 等は、すでに「生成・消滅演算子」で見たものである。

$\hat{a}^\dagger \hat{a}$ が対角型になっている表示での $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ の解は、

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2^{1/2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3^{1/2} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad \hat{a}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2^{1/2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3^{1/2} & 0 & \dots \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{の行列になっていて, } \hat{a}^\dagger \hat{a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix} \text{ となる。}$$

したがって、 \hat{N}_k のそれぞれが対角型になっている表示では、量子化された場の状態は、 $|n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle$ である。

次の関係が成立する。

$$\hat{a}_k |n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle = n_k^{1/2} |n_1, n_2, \dots, n_k - 1, \dots\rangle \quad \text{消滅演算子}$$

$$\hat{a}_k^\dagger |n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle = (n_k + 1)^{1/2} |n_1, n_2, \dots, n_k + 1, \dots\rangle \quad \text{生成演算子}$$

$i\hbar \frac{\partial \hat{N}(t)}{\partial t} = [\hat{N}(t), \hat{H}] = 0$ から明らかのように、 $\hat{N} = \sum_k \hat{N}_k$ は定数 (保存量) になっているが、 \hat{N}_k が恒量になっているという保障はない。では、 \hat{N}_k が保存量になるのはどのようなときなのか。

$i\hbar \frac{\partial \hat{N}_k}{\partial t} = [\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k, \hat{H}]$ で与えられるから、

$$\text{ただし, } \hat{H} = \int \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \hat{\psi}^\dagger \nabla \hat{\psi} + V \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} \right) d^3r$$

$$= \sum_{j,l} \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_l \int u_j^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) u_l d^3r \quad \leftarrow \hat{\psi} = \sum_k \hat{a}_k u_k, \hat{\psi}^\dagger = \sum_k \hat{a}_k^\dagger u_k^*$$

$$i\hbar \frac{\partial \hat{N}_k}{\partial t} = \sum_{j,l} \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_l - \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_l \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \right) \int u_j^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) u_l d^3r$$

↑ これは、 $j = l = k$ または $j \neq k, l \neq k$ のときは 0 となる

すなわち、

$$j, l \text{ のうち一方のみが } k \text{ のとき } \int u_j^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) u_l d^3r = 0 \text{ となるならば, } i\hbar \frac{\partial \hat{N}_k}{\partial t} = 0 \text{ となる。}$$

↑ これは、1 粒子ハミルトニアン of 行列要素をあらわす式に他ならないから、状態 k の関係するよう非対角線要素のすべてが 0 になっているときということである。

u_k が、 $-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V$ の固有関数になっている場合

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) u_k = E_k u_k \text{ とすると (すなわち固有値 } E_k)$$

$$\hat{H} = \sum_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k E_k = \sum_k \hat{N}_k E_k$$

すなわち、ここでは \hat{H} もまた対角型になっている。

なお、 $|n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle$ は、 \hat{H} に対し、固有値 $\sum_k n_k E_k$ をもっている。

この場合には、すべての \hat{N}_k が一定になっていることは明らかである。 $\rightarrow i\hbar \frac{\partial \hat{N}_k}{\partial t} = 0$

参考 //////////////////////////////////////

シュレディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi$$

$$\text{ラグランジアン密度 } \mathbf{L} = i\hbar \psi^* \dot{\psi} - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi^* \nabla \psi - V \psi^* \psi$$

$$\text{または、} \mathbf{L} = \frac{i\hbar}{2} (\psi^* \dot{\psi} - \dot{\psi}^* \psi) - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi^* \nabla \psi - V \psi^* \psi$$

ディラック相対論

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -ic\hbar \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla \psi + \beta mc^2 \psi + V\psi$$

$$\mathbf{L} = i\hbar \psi^\dagger \dot{\psi} + ic\hbar \psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla \psi - mc^2 \psi^\dagger \beta \psi - V \psi^\dagger \psi$$

$$\text{または、} \mathbf{L} = \frac{i\hbar}{2} (\psi^\dagger \dot{\psi} - \dot{\psi}^\dagger \psi) + ic\hbar \psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla \psi - mc^2 \psi^\dagger \beta \psi - V \psi^\dagger \psi$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

電磁場中

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + e\phi)\psi = c\boldsymbol{\alpha} \cdot (-i\hbar \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A})\psi + \beta mc^2 \psi$$

$$\mathbf{L} = i\hbar \psi^\dagger \dot{\psi} + ic\hbar \psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla \psi - e\psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A} \psi - mc^2 \psi^\dagger \beta \psi + e\phi \psi^\dagger \psi$$

真空中の電磁場の量子化

マックスウェルの方程式 (真空中)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad \textcircled{1}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \textcircled{2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \textcircled{3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad \textcircled{4}$$

電磁ポテンシャル \mathbf{A} と ϕ を導入し、 $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$ 、 $\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ とする (と定義しなおす)。

すると、①と④は自明となる。 相対性理論 [page10](#) 参照

$$\text{ラグランジアン密度 } \mathbf{L} = \frac{1}{8\pi} (E^2 - H^2) = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right)^2 - \frac{1}{8\pi} (\nabla \times \mathbf{A})^2$$

場のラグランジアン方程式

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \psi} - \sum_{x,y,z} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial (\partial \psi / \partial x)} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\psi}} \right) = 0 \quad \text{page43 参照}$$

これは上のマックスウェルの方程式を導き出す。(Aが②、φが③、①と④はEとHの定義より)

$$\pi_x = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{A}_x} = \frac{1}{4\pi c} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} + \partial \phi / \partial x \right) = -\frac{1}{4\pi c} E_x \quad \left(\boldsymbol{\pi} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\mathbf{A}}} = \frac{1}{4\pi c} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) = -\frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \right)$$

$$\pi_\phi = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\phi}} = 0 \quad \rightarrow \text{この事情は}\phi\text{を場の変数として取り扱うことは不可能で、ハミルトニアンから}\phi\text{を消去しなければ}$$

$$[\hat{q}_{k\lambda}(t), \hat{p}_{k'\lambda'}^\dagger(t)] = [\hat{q}_{k\lambda}^\dagger(t), \hat{p}_{k'\lambda'}(t)] = i\hbar \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'}$$
 } とすると、
 その他の組み合わせは可換。
 上の $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\boldsymbol{\pi}}$ に関する交換関係が導ける。

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int \{ 2\pi c^2 \hat{\boldsymbol{\pi}}^2 + \frac{1}{8\pi} (\nabla \times \hat{\mathbf{A}})^2 \} d^3r \\ &= \sum'_{k\lambda} \left(4\pi c^2 \hat{p}_{k\lambda} \hat{p}_{k\lambda}^\dagger + \frac{k^2}{4\pi} \hat{q}_{k\lambda} \hat{q}_{k\lambda}^\dagger \right) \end{aligned}$$

ここでの固有値を求めたいわけであるが、このためには \hat{H} を多数の調和振動子のエネルギーの和の形にもっていかなくてはならない。

$$\begin{cases} i\hbar \dot{\hat{q}}_{k\lambda} = [\hat{q}_{k\lambda}, \hat{H}] = 4\pi i\hbar c^2 \hat{p}_{k\lambda} \\ i\hbar \dot{\hat{p}}_{k\lambda} = [\hat{p}_{k\lambda}, \hat{H}] = -\frac{i\hbar k^2}{4\pi} \hat{q}_{k\lambda} \end{cases}$$

$$\therefore \ddot{\hat{q}}_{k\lambda} = -k^2 c^2 \hat{q}_{k\lambda}$$

この方程式は容易に積分されて、 $\hat{q}_{k\lambda}$ は次のようにあらわせる。

$$\hat{q}_{k\lambda} = \hat{a}_{k\lambda} e^{-ikct} + \hat{a}'_{k\lambda} e^{ikct} \quad \hat{a}_{k\lambda}, \hat{a}'_{k\lambda} \text{ は } \mathbf{r}, t \text{ に無関係な演算子}$$

(真空中の電磁波は、平面波に分解されて \mathbf{r}, t を含まない係数の関数となる。)

$$\text{これから、} \hat{p}_{k\lambda} = -\frac{ik}{4\pi c} \hat{a}_{k\lambda} e^{-ikct} + \frac{ik}{4\pi c} \hat{a}'_{k\lambda} e^{ikct}$$

$$\hat{a}_{k\lambda} = \frac{1}{2} \left(\hat{q}_{k\lambda} + \frac{4\pi ic}{k} \hat{p}_{k\lambda} \right) e^{ikct}$$

$$\hat{a}'_{k\lambda} = \frac{1}{2} \left(\hat{q}_{k\lambda} - \frac{4\pi ic}{k} \hat{p}_{k\lambda} \right) e^{-ikct}$$

$$\text{交換関係 } [\hat{a}_{k\lambda}, \hat{a}_{k'\lambda'}^\dagger] = [\hat{a}'_{k\lambda}, \hat{a}'_{k'\lambda'}^\dagger] = \frac{2\pi\hbar c}{k} \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'} \text{ をえる。}$$

この他の組み合わせは全部可換である。

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum'_{k\lambda} \left(4\pi c^2 \hat{p}_{k\lambda} \hat{p}_{k\lambda}^\dagger + \frac{k^2}{4\pi} \hat{q}_{k\lambda} \hat{q}_{k\lambda}^\dagger \right) \\ &= \sum'_{k\lambda} \frac{k^2}{2\pi} \left(\hat{a}_{k\lambda} \hat{a}_{k\lambda}^\dagger + \hat{a}'_{k\lambda} \hat{a}'_{k\lambda} \right) \end{aligned}$$

$$\hat{N}_{k\lambda} = \frac{k}{2\pi\hbar c} \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{k\lambda}, \quad \hat{N}'_{k\lambda} = \frac{k}{2\pi\hbar c} \hat{a}'_{k\lambda} \hat{a}'_{k\lambda} \quad \text{とすると、(これらは、} 0, 1, 2, \dots \text{ の固有値をもつ。)}$$

$$\hat{H} = \sum'_{k\lambda} \hbar c k (\hat{N}_{k\lambda} + \hat{N}'_{k\lambda} + 1)$$

式の構造から考えて、 $\hat{a}'_{k\lambda}$ を $\hat{a}_{k\lambda}$ と、 $\hat{N}'_{k\lambda}$ を $\hat{N}_{k\lambda}$ と同一視することができる。

そうすれば、和を \mathbf{k} 空間の半分に限るという制限を除くことができる。

$$\hat{H} = \sum'_{k\lambda} \hbar c k \left(\hat{N}_{k\lambda} + \frac{1}{2} \right) \text{ を得る。}$$

これは、平面電磁波のそれぞれに付随しているエネルギーが、基本的な量子 $\hbar\nu = \hbar ck$ の整数倍になっていることを表している。

場の量子論における Noether の定理 (対称性と保存量)

物理学において、ネーターの定理 (Noether's theorem) は、系に連続的な対称性がある場合はそれに対応する保存則が存在すると述べる定理である。ドイツの数学者エミー・ネーターによって 1915 年に証明され、1918 年に公表された。『ウィキペディア (Wikipedia)』より

場を $u_A(x, t)$ とする。

添え字 A は、電磁ポテンシャル、Dirac 場や核子の陽子・中性子を区別するアイソスピンなどをあらわす。

u_A は、一般に複素関数であってもよいが、そのときは、 u_A と u_A^* は独立にかぞえられる。

変分 $\delta u_A(x, t) = u'_A(x, t) - u_A(x, t)$ を考える。

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \delta u_A = \delta \frac{\partial u_A}{\partial x_\mu} \text{ が成り立つ。}$$

つぎに、変分の対象となる Lagrange 関数 $L(x_0)$ に対して次の仮定を行う。

$$L(x_0) = \int \mathbf{L}(x, x_0) d^3\mathbf{x}$$

$\mathbf{L}(x)$ は、4 次元時空点 x_μ における u_A と $u_{A,\mu} (= \partial u_A / \partial x_\mu)$ の局所的関数であるとする。

ここには、2つの仮定が含まれている。

- ① $\mathbf{L}(x)$ が $u_A(x)$ とその 1 階の時空間微分 $u_{A,\mu}(x)$ を含むとしている点で、したがって、それから導かれる波動方程式は時空間について高々、2 階の微分方程式であることを前提にしている。
- ② もう一つは、 $\mathbf{L}(x)$ の局所性である。 $\mathbf{L}(x)$ は当然、場の場の相互作用項をも含むことになるが、この仮定によって相互作用の素過程は局所的にのみ生起すること、したがって遠隔作用は許されず、それは場の媒介による近接作用によっておきかえられなければならない。

ところで、この 2つの仮定は、次の意味で相互に関連している。すなわち、非局所的相互作用をあえて局所的な形に書き換えようとする、今度は、場に無限階の時空間微分を持ちこんだ相互作用があらわれる。

いずれにせよ、この仮定は理論の可能性の枠をせばめているわけであるが、しかし、いったんこの枠をはずすと相対性理論や量子力学の諸原理に抵触する困難をひき起こしてしまうことになる。

さて、上述の $\mathbf{L}(x)$ の下で作用積分の変分を遂行する。

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{x_0^{(1)}}^{x_0^{(2)}} L dx_0 \\ &= \int_{x_0^{(1)}}^{x_0^{(2)}} \delta \mathbf{L}(u, u_\mu) d^4x \\ &= \int_{x_0^{(1)}}^{x_0^{(2)}} \left\{ \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial u(x)} \delta u(x) + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial u_\mu(x)} \delta u_\mu(x) \right\} d^4x \\ &= \int_{x_0^{(1)}}^{x_0^{(2)}} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial u_\mu} \right) \delta u d^4x + \int_{x_0^{(1)}}^{x_0^{(2)}} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial u_\mu} \delta u \right) d^4x \end{aligned}$$

ここで、この積分は、時間については $x_0^{(1)}$ と $x_0^{(2)}$ の間で画されるが、空間的には無限遠にわたる領域について遂行される。その際、場の量が空間的に無限遠では 0 になることを仮定すると (さらに $x_0 = x_0^{(1)}$, $x_0^{(2)}$ においては $\delta u = 0$)、

$$\begin{aligned} \text{上式} &= \int_{x_0^{(1)}}^{x_0^{(2)}} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial u_\mu} \right) \delta u d^4x \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

そこで、求める Euler の運動方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial u_\mu(x)} - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial u} = 0$$

場 $u(x)$ として複素数を考えるときは、 $u^*(x)$ も $u(x)$ と独立な変分の対象となり、Euler 方程式は u , u^* のそれぞれについて導かれるが、両者が矛盾しないためには、 \mathbf{L} は実数関数でなければならない。

不変性や保存量の中には、相対論的不変性や電荷の保存のように厳密に成り立っていると考えられるものもあるが、アインシュタイン空間での回転不変性のように近似的に成り立っているものがほとんどである。

系のもつ不変性は、大きく分けて連続変換と非連続変換のもとでの不変性がある。後者は、種々の反転、例えば時間・空間反転や粒子 - 反粒子反転などがある。それに対し、前者は幾つかの連続パラメーターで特徴づけられる変換である。例えば、4次元空間内での並進や回転、スケール変換、ゲージ変換などである。

ここでは、連続変換をあつかう。

この場合、変換の性質をみるには、パラメーターの無限小変化に対応する無限小変換を考察すれば十分であることが知られている。

いま、無限小変換が s 個の独立な無限小パラメーター $\delta\omega_i$ ($i = 1, 2, \dots, s$) でひきおこされているとする。

1) まず、座標変換 $x_\mu \rightarrow x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu$ については、

$$\delta x_\mu = \sum_{i=1}^s X_{\mu i} \delta\omega_i \text{ とあらわせる。ここに、} X_{\mu i}(x) \text{ は一般に } x \text{ の関数である。}$$

2) 一方、場の量 $u_A(x)$ は、 $u'_A(x')$ に変換されるが、それは $\delta\omega_i$ によってつぎのように結ばれる。

$$u_A(x) \rightarrow u'_A(x') = u_A(x) + \delta u_A(x)$$

$$\delta u_A(x) = \sum_{i=1}^s \psi_{Ai} \delta\omega_i \quad \psi_{Ai} \text{ は一般に } \{u_B(x)\} \text{ の組の関数である。}$$

$$\textcircled{\text{注}} \quad \delta u \text{ と } \delta u \text{ のちがいは: } \delta u(x) = \delta u(x) + u_{,\mu}(x) \delta x_\mu \quad \frac{\partial}{\partial x_\mu} \delta u(x) \neq \delta \frac{\partial u(x)}{\partial x_\mu}$$

これらの変換のもとで、任意の閉じた 4 次元領域 R_4 にわたる作用積分の変化 δS_{R_4} を求めよう。

$$\begin{aligned} \delta S_{R_4} &= \delta \int_{R_4} L(u(x), u_{,\mu}(x)) d^4x \\ &= \int_{R_4} L(u'(x'), u'_{,\mu}(x')) d^4x' - \int_{R_4} L(u(x), u_{,\mu}(x)) d^4x \end{aligned}$$

ここで、 $\int_{R_4} L(u'(x'), u'_{,\mu}(x')) d^4x'$ を左項から引き、右項には加える。

$$= \int_{R_4} L(u(x), u_{,\mu}(x)) \frac{\partial \delta x_\mu}{\partial x_\mu} d^4x + \int_{R_4} \delta L(u(x), u_{,\mu}(x)) d^4x$$

ただし、 $\delta d^4x = d^4x' - d^4x = \prod_{\mu} (dx_\mu + d\delta x_\mu) - d^4x = \frac{\partial \delta x_\mu}{\partial x_\mu} d^4x$ を用いた。(1次近似をとればよい)

$$\begin{aligned} \text{第2項は、} \delta L &= \delta L + \frac{\partial L}{\partial x_\mu} \delta x_\mu \\ &= \int_{R_4} L \frac{\partial \delta x_\mu}{\partial x_\mu} d^4x + \int_{R_4} (\delta L + \frac{\partial L}{\partial x_\mu} \delta x_\mu) d^4x \\ &= \int_{R_4} \{ \delta L + \frac{\partial}{\partial x_\mu} (L \delta x_\mu) \} d^4x \end{aligned}$$

第1項目は、すでに Euler の方程式が成りたつので、積分領域のちがいを考えさえすればそのまま前の計算を利用できて、

$$\begin{aligned} &= \int_{R_4} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial L}{\partial u_{,\mu}} \delta u + L \delta x_\mu \right) d^4x \\ &= \int_{R_4} \frac{\partial}{\partial x_\mu} (Q_{\mu i} \delta\omega_i) d^4x \quad i = 1, 2, \dots, s \quad i \text{ の和をとる} \end{aligned}$$

$$\text{ただし、} Q_{\mu i} = \frac{\partial L}{\partial u_{,\mu}} (u_{,\sigma}(x) X_{\sigma i} - \psi_{Ai}) - L X_{\mu i}$$

さて、系が $\delta\omega_i$ の無限小変換の下で不変であるためには、 δS_{R_4} は任意の 4 次元領域 R_4 に対して、また、任意の s 個の $\delta\omega_i$ のもとで 0 となる必要がある。

このことから、全時空間にわたって、

$$\frac{\partial Q_{\mu i}(x)}{\partial x_\mu} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, s \quad \text{Noether の定理}$$

であることが要請される。これは、局所保存式と呼ばれるものである。

対称性の自発的破れ (相互作用と対称性)

自由場ないしは自由粒子という概念は、限られた特定の条件でのみなりたっている。通常は、相互作用を無視するわけにはいかない。

相互作用の効果を分析するためには、まずラグランジアンを2分して自由部分と相互作用部分と呼ばれるものの和にあらわす。前者は後者を無視したときに、漸近的世界の自由粒子 (お互いに遠く離れていて、それぞれは他からの影響を受けることなくふるまうとみなしてよい) を記述するようなラグランジアンである。

【例】

ディラック場 $\psi(x)$ で記述されるスピン 1/2 の荷電粒子と電磁場 $A_\mu(x)$

$$L(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2(x) - \psi^\dagger(x)(\gamma_\mu \partial_\mu + m_0)\psi(x) + ie\psi^\dagger(x)\gamma_\mu \psi(x)A_\mu(x)$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - \psi^\dagger(\gamma_\mu \partial_\mu + m_0)\psi}_{\text{自由部分}} + \underbrace{ie\psi^\dagger\gamma_\mu \psi A_\mu + \delta m \psi^\dagger \psi}_{\text{相互作用部分}} \quad \delta m = m - m_0$$

重要なのは、理論の器となるべきフォック空間 (page48) を決めるためにいかにしてラグランジアンから自由部分を取りだすかであり、これによって与えられたフォック空間の中で相互作用部分の効果を分析することになる。

しかし、漸近的世界にどのような自由粒子が存在しうるかは、実は問題が完全に解かれてからはじめてわかるはずのもので、前もってこれが知られているわけではない。したがって、さまざまな打診によって、あらかじめ漸近的世界の中身を想定し、そのようなフォック空間の中で矛盾なく議論が行えるかどうかを実際の計算を通して吟味していかねばならない。上の例では、 m は漸近的世界でのディラック粒子の質量だが、最初の m_0 とは異なることが予想されるので、そのずれをあらかじめ相互作用にくり入れておき、 δm は計算を通して全体のつじつまが合うように決めるようにしてあるのである。

【例】

$\phi(x)$ を実のスカラー場として、以下のラグランジアン密度で記述される系を考えてみる。

$$L(x) = -\frac{1}{2} \{(\partial_\mu \phi(x))^2 - \frac{k^2}{2} \phi^2(x)\} - \frac{\lambda}{8} \phi^4(x)$$

まず、第1次近似としてここにどんな振動子が含まれているかをみるために、まず、 $\phi(x)$ の中の空間座標 \mathbf{x} を無視してみる。

$$\text{すると、} L = -\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{k^2}{4} \phi^2 - \frac{\lambda}{8} \phi^4$$

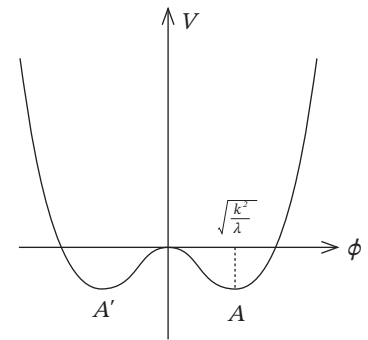
したがって、ポテンシャルは $V = -\frac{k^2}{4} \phi^2 + \frac{\lambda}{8} \phi^4$ となって、極小点 A または A' のまわりに微小振動が生ずることになる。

そこで、 A 点の近傍の振動を取りだすために、 $\phi(x)$ を A 点の ϕ 座標 =

$$\sqrt{\frac{k^2}{\lambda}} \text{ だけずらして、} \eta(x) \equiv \phi(x) - \sqrt{\frac{k^2}{\lambda}} \text{ とおくと、}$$

$$L(x) = -\frac{1}{2} \{(\partial_\mu \eta(x))^2 + k^2 \eta^2(x)\} - \frac{\sqrt{\lambda k^2}}{2} \eta^3(x) - \frac{\lambda}{8} \eta^4(x) + const.$$

すなわち、 $m^2 = k^2 + \delta m^2$ として、自由部分を $-\frac{1}{2} \{(\partial_\mu \eta(x))^2 + m^2 \eta^2(x)\}$ 、残りを相互作用部分とみなしうるということが予想される。



A' のまわりの振動を出発点にとっても同様の議論を行えることはもちろんであるが、ここで注意すべきことは、 A, A' それぞれのまわりでの振動に由来する2つのフォック空間は、完全に別個の独立なものであるということである。

なぜならば、仮にもし系の自由度が1であるならば、トンネル効果によって2つの振動は互いに影響しあい、両者の間にはある確率で結びつきが生じることになる。自由度が2のときは、このような結びつきの確率は、それぞれの確率の積である。ゆえに、無限個の自由度をもつ場の量子論では、1より小さな量の無限個の積になり、相互の関連は断ち切られてしまうことになるわけである。

対称性の自発的破れ

上の例では、2つのフォック空間 (A, A' に由来する) のどちらを選んでも得られる物理的な結果は同じとなるが、これは $\phi(x) \rightarrow -\phi(x)$ なる変換を行っても $L(x)$ が不変なことによる。しかし、2つの可能なフォック空間は、この変換において対称性は保持されていない。これは、基本になる A または A' のまわりの振動の方程式が、この変換で不変でないことによる。

このような現象は、「対称性の自発的破れ」と呼ばれ、一般には次のように定義される。

すなわち、場の量についてある種の変換を行ったとき、系のラグランジアン密度 $L(x)$ が不変であったとする。このとき、この変換のもとで不変でないような演算子で、しかもその真空期待値が 0 でないようなものが存在した場合、上記の変換による系の対称性は自発的に破れているという。上の例では、 $\langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle \neq 0$ となっている。

南部・ゴールドストーン粒子

$\phi(x) \rightarrow -\phi(x)$ は不連続変換だが、連続変換のときは対称性の破れについてさらに次のような興味ある結果が導かれ、南部・ゴールドストンの定理と呼ばれている。

「ローレンツ変換や時空座標の平行移動の変換とは無関係な場の量に関する連続変換で、ラグランジアン密度が不変であり、しかも系に長距離力が存在しないという条件のもとでこの対称性が自発的に破れているならば、これに伴って、スピン 0、質量 0 の粒子が必ず存在することになる。」 (π 中間子は、その質量を無視した極限で、この種の粒子の一つとみなしうる。)

なお、南部・ゴールドストンの粒子は、不連続変換の対称性が自発的に破れても現れない。これは、あくまでも、連続変換に関連して現れるものである。

【例】

上では、実場を用いたが、ここでは $\phi(x)$ を複素場として次のラグランジアンを考える。

$$L(x) = -\left\{ \partial_\mu \phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x) - \frac{k^2}{2} \phi^\dagger(x) \phi(x) + \frac{\lambda}{2} (\phi^\dagger(x) \phi(x))^2 \right\} \quad \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2) \quad \phi_1, \phi_2 \text{ は実}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{j=1,2} \{ (\partial_\mu \phi_j(x))^2 - \frac{k^2}{2} \phi_j^2(x) \} - \frac{\lambda}{8} (\sum_{j=1,2} \phi_j^2(x))^2$$

これは、 θ をパラメータとする次の変換で不変である。

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &\rightarrow \phi_1(x) \cos \theta + \phi_2(x) \sin \theta \\ \phi_2(x) &\rightarrow -\phi_1(x) \sin \theta + \phi_2(x) \cos \theta \end{aligned}$$

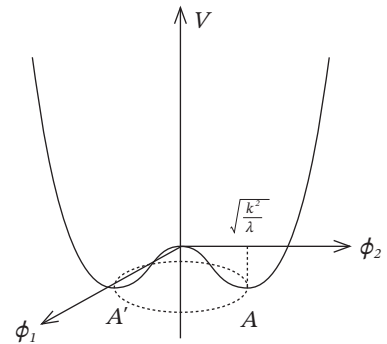
前と同様に、 $\phi_j(x)$ の x 依存性を無視したときのポテンシャル $V(\phi_1, \phi_2) = -\frac{k^2}{4} \sum \phi_j^2 + \frac{\lambda}{8} (\sum \phi_j^2)^2$ の極小値は $\phi_1^2 + \phi_2^2 = \frac{k^2}{\lambda}$ なる円上で与えられる。

$(\phi_1, \phi_1) = (0, \sqrt{\frac{k^2}{\lambda}})$ を中心にした振動を考えて、前と同じように次のようにおく。

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \phi_2(x) - \sqrt{\frac{k^2}{\lambda}} \\ \chi(x) &= \phi_1(x) \end{aligned}$$

すると、 $L(x) = -\frac{1}{2} (\partial_\mu \chi(x))^2 - \frac{1}{2} \{ (\partial_\mu \eta(x))^2 + k^2 \eta^2(x) \} - \frac{\lambda}{8} (\eta^2(x) + \chi^2(x))^2 - \frac{\sqrt{\lambda k^2}}{2} \eta(x) (\eta^2(x) + \chi^2(x))$

$\chi(x)$ が、南部・ゴールドストーン粒子の場になっている。



ヒッグス機構

上のような連続変換のパラメータは、変換をうける場の変数 x とは無関係な量として扱われたが、 x の任意の関数であったとしたらどうであろうか。つまり、変換は各時空点で独立に行われるものと考えられるわけである。この

ようにすると、ラグランジアンの不変性が失われることがわかる。しいて不変性を保とうとすれば、新しい場を導入して、これに x に依存する変換を同時に行わせ、不変性を壊す余分な部分を打ち消すようにしてやらなければならない。この種の場は、ゲージ場と呼ばれ、そこには固有の質量項がないため、長距離力を与えることになる。(さきの南部・ゴールドストンの定理中の長距離力とは、このようなゲージ場によってもたらされるものをさす。)

【例】

ディラック場のラグランジアン

$$L(x) = -\psi^\dagger(x)(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi(x)$$

これは λ をパラメータとして、 $\psi(x) \rightarrow \exp(i\lambda)\psi(x)$, $\psi^\dagger(x) \rightarrow \exp(-i\lambda)\psi^\dagger(x)$ で不変である。

λ のかわりに $\lambda(x)$ を用いれば、不変性は破れる。しかし、 $A_\mu(x)$ という質量 0 のベクトル場を導入して、次のラグランジアンを用いる。

$$L(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2(x) - \psi^\dagger(x)(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi(x) + ie\psi^\dagger(x)\gamma_\mu\psi(x)A_\mu(x) \quad \text{page55 参照}$$

そして、 $\psi(x)$, $\psi^\dagger(x)$ に対する上の $\lambda(x)$ を用いた変換とともに、 $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \lambda(x)$ の変換を行うならば、このラグランジアンは、不変になる。すなわち、上のラグランジアンをゲージ化したものが、下のラグランジアンにほかならない。

さて、ある無限小変換で対称性の自発的な破れが起こったとき、この変換がゲージ化されて対応するゲージ場が共存していたとしたら、この定理はどうなるであろうか。そのときには、南部・ゴールドストン粒子は消えてしまって、かわってゲージ場に質量項が現れるということが起こる。このメカニズムは、ヒッグス機構とよばれ、それに対する一般的な証明は与えられている。

【例】

$\phi(x)$ を質量 0 の実スカラー場

$$\text{ラグランジアン } L(x) = -\frac{1}{2} (\partial_\mu \lambda(x))^2$$

これは、 λ をパラメータとする変換 $\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \lambda$ で不変かつ $\langle 0 | \phi^2(x) | 0 \rangle \neq 0$ となるから、すでに対称性の自発的破れが起っており、 $\phi(x)$ 自身が南部・ゴールドストン粒子を与える場となっている。

λ のかわりに $\lambda(x)$ を用いると上の $L(x)$ は不変でなくなるが、 $A_\mu(x)$ を導入して、

$$L(x) = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x))^2 - (\partial_\mu \phi(x) + eA_\mu(x))^2 \quad \text{としよう。}$$

このとき、変換 $\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \lambda(x)$, $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \lambda(x)$ で不変となり、ゲージ化される。

ここで、 $V(x) \equiv A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \phi(x)$ とおくと $L(x)$ は、

$L(x) = -\frac{1}{4} (\partial_\mu V_\nu(x) - \partial_\nu V_\mu(x))^2 - \frac{e^2}{2} V_\mu^2(x)$ となつて、 $\phi(x)$ はなくなり、質量の 2 乗が $\frac{1}{e^2}$ のベクトル場 (page55 参照) の式となる。つまり南部・ゴールドストン粒子は完全に姿を消し、ヒッグス機構が生じたわけである。

ゲージ場の理論

これ以降の議論は、第3部への序説という位置づけなので大筋にとどめることにする。

まず、理論は、座標の平行移動に対して不変でなければならない。また、相対論的不変な内容を保持するためには、Lorentz 変換（慣性系座標間の変換）に対して共変的な形をとらなければならない。

平行移動と Lorentz 変換との積変換を非斉次 Lorentz 変換という。非斉次 Lorentz 変換の全体は群をつくり、その群を非斉次 Lorentz 群または Poincaré 群とよぶ。

アインシュタインの一般相対性理論では、時空自体が物質の存在によって曲がった空間になり、重力場 g_{ij} または曲率がきまってくる。さらに、時空ベクトルの微小平行移動もこの g_{ij} によって表せるようになり、すなわち、微分もこれを含む形となる。ここでは、長さ、時間の基準といったものが、時空の位置によって変わってくるということがおさえられねばならない。

これと同じことを物質にも考えようというのである。物質場 ϕ をはかるものさしといったものが、時空の位置によって変わるとするのである。すると、この ϕ の微小平行移動は、あるゲージ場 \mathbf{A} （ちょうど重力場 g_{ij} のようなもの）がかかわるものとして表されるようになる。また、この \mathbf{A} によって、 ϕ の内部空間の曲率も定まるのである。

重力場 g_{ij} のもとでは、時空ベクトルを平行移動させながらもとの位置に戻したとき、このベクトルは必ずしももとのものとは重ならなくなるが、 ϕ を平行移動させていったときも同じようなことがおこる（すなわち、道すじによって異なる）。そこで、まず ϕ の微小平行移動をどのようにあらわすのかが問題となる。

粒子の場を、 $\phi_a(\mathbf{r})$ と書くことにする。ここで指標 $a (= 1, 2, \dots, N)$ は、粒子の内部空間の座標に対応するものである。

$\phi_a(\mathbf{r})$ をそのまま $\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}$ に平行移動して、点 $\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}$ に用意されているゲージで計られた場を $\phi_a(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) //$ と書くことにする。そしてその道すじは、 \mathbf{r} から $\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}$ までの最短距離をとるとするのである。

すると、 $\phi_a(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) // = \phi_a(\mathbf{r}) - \sum_b \mathbf{A}_{ab}(\mathbf{r}) \cdot \Delta \mathbf{r} \phi_b(\mathbf{r})$ で表わされる。（仮定）

曲率の定義

点 \mathbf{r} で接平面内に1つの方向を選ぶ。次に、点 \mathbf{r} から出発して十分小さな面積 ΔS をもつ面要素の周辺に沿って、その方向を平行移動してもとの点 \mathbf{r} に戻ってきたときの方向の ΔS に関する変化率が曲率である。

$$\begin{aligned} \Delta \phi(\mathbf{r}) &= -\phi(\mathbf{r}) \oint_{\partial \Delta S} \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \\ &= -\phi(\mathbf{r}) \int_{\Delta S} \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) dS \end{aligned}$$

したがって、 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ が点 \mathbf{r} の内部空間の曲率であるといえる。

内部空間が多次元の場合

$$\mathbf{F}_{ab}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}_{ab}(\mathbf{r}) + \sum_c \mathbf{A}_{ac}(\mathbf{r}) \times \mathbf{A}_{cb}(\mathbf{r})$$

さらに時空間の次元も一般化して、任意の次元で以上の考察をくり返すと、曲率は時空間における反対称テンソルであることが容易に導かれる。

$$F_{\mu\nu ab}(x) = \partial_\mu A_{\nu ab}(x) - \partial_\nu A_{\mu ab}(x) + \sum_c (A_{\mu ac}(x) A_{\nu cb}(x) - A_{\nu ac}(x) A_{\mu cb}(x))$$

この式で内部空間が1次元の場合、第3項、第4項は相殺して0となり、4元ベクトル・ポテンシャル A_μ と電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ の関係を与えるものとなっていることがわかる。

すなわち、 $\partial_\mu F_{\mu\nu}(x) = j_\nu(x)$ は電荷をもった物質と荷電内部空間の曲率を規定するゲージ場の相互関係を与える式の一部であることがわかる。

微分算の変更

$$\begin{aligned} D_\mu \phi_a(x) &= \lim_{\Delta x_\mu \rightarrow 0} \frac{\phi_a(x + \Delta x) - \phi_a(x + \Delta x) //}{\Delta x_\mu} \\ &= \partial_\mu \phi_a(x) + \sum_b A_{\mu ab}(x) \phi_b(x) \end{aligned}$$

すなわち、電磁場の方程式 $\partial_\mu F_{\mu\nu}(x) = j_\nu(x)$ も、
 $D_\mu F_{\mu\nu}(x) = j_\nu(x)$ と書き直さなければならない。
 一般には、

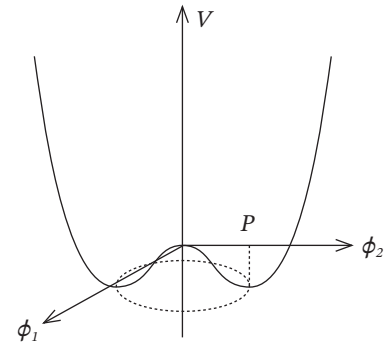
$$\partial_\mu F_{\mu\nu ab} + \sum_c (A_{\mu ac} F_{\mu\nu cb} - F_{\mu\nu ac} A_{\mu cb}) = j_{\nu ab}$$

└ 内部空間が1次元の場合は0となる ┘

ここでヒッグス機構をふたたび振り返っておくと……

対称性の自発的破れによって、南部・ゴールドストーン粒子が現れたが、これは場の量 ϕ に対する連続変換でラグランジアン密度が不変である場合=図の場合は、 V 軸のまわりのさまざまな回転に対して不変となるわけだが、このとき P を中心とした振動を考えると、明らかに対称性は破れてしまい、このとき南部・ゴールドストーン粒子の場があらわれるというものであった。

さらにこのとき、 ϕ に対するゲージ場（質量項のない長距離力となっている）が存在していたらどうなるであろうか。すると、南部・ゴールドストーン粒子は消えてかわりに質量項があらわれるということが起きたのである。



$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$$

くりこみ理論

量子電気力学（電磁場と電子）で、高次の摂動項を計算すると一般に答えは無限大になる。朝永、Schwinger、Feynman らは、この無限大は電子の質量 m_e と電荷 e に吸収できることを示した。

$$m_e = m_{e0} + \delta m_e$$

有限 無限大 無限大

① 朝永表示

Heisenberg 表示においては、状態は常に定常的で、時間的な変化はすべて物理量の時間変化によって求められる。一方、Schrödinger 表示においては、状態関数が時間変化をする。

相互作用を含む場合は、場の量子化が簡単になる Schrödinger 表示をとるが、この場合、理論の相対論的共役性がきわめて見通しの悪いものとなる。そこでもちいられるのが朝永表示である。朝永表示においては、状態も物理量も時間的に変化するが、物理量はあたかも相互作用のない場合のように変わる。

Schrödinger 表示でのハミルトニアンを $H = H_0 + H_{int}$ とする。

【Schrödinger 表示】

Schrödinger 表示では、状態 $\psi_S(t)$ および物理量 F の変化は、

$$i\hbar \frac{\partial \psi_S(t)}{\partial t} = H \psi_S(t), \quad \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

H が t をあらわに含まないとすると、 $\psi_S(t) = e^{-iHt/\hbar} \psi_S(0)$ と求められる。

【Heisenberg 表示】

Heisenberg 表示では、

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad -i\hbar \frac{\partial F(t)}{\partial t} = [H, F(t)] \quad \text{古典力学のポアソン括弧が対応する}$$

これらの2つの表示は、 $\psi_S(t)$ と ϕ との間の次のユニタリ変換によって結ばれる。

$$\phi = e^{iHt/\hbar} \psi_S(t), \quad F(t) = e^{iHt/\hbar} F e^{-iHt/\hbar}$$

$\varphi(t) = T \varphi(0)$ によって変化する状態 $\varphi(t)$ は、ユニタリ変換 $\varphi \rightarrow T^{-1} \varphi$ によって止まってしまう。同時に物理量 \mathbf{v} は、 $T^{-1} \mathbf{v} T$ に変換しておけばよい。

ユニタリ変換 U において、状態 φ を $U\varphi$ に、物理量 R を URU^{-1} に変換しても、物理的記述は同等である。なぜなら、物理的に有意義な $R\varphi = \lambda\varphi$ は、不変にとどまるから。

【朝永表示】

いま、 ψ_S に別のユニタリ変換で結ばれる $\psi(t)$ を考える。

$$\psi(t) = e^{iH_0 t/\hbar} \psi_S(t), \quad F(t) = e^{iH_0 t/\hbar} F e^{-iH_0 t/\hbar} \quad (1)$$

この結果、状態関数は、

$$i\hbar \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = H_{int}(t) \psi(t), \quad H_{int}(t) = e^{iH_0 t/\hbar} H_{int} e^{-iH_0 t/\hbar} \quad (2)$$

$$\text{物理量は、} -i\hbar \frac{\partial F(t)}{\partial t} = [H_0, F(t)] \quad (3)$$

② S 行列と摂動論

$t = t_0$ における状態が与えられると、任意の時刻での状態は、

$$\psi(t) = U(t, t_0) \psi(t_0)$$

$$U^*(t, t_0) = U^{-1}(t, t_0), \quad U(t, t') U(t', t_0) = U(t, t_0)$$

これらと②により、

$$U(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_{int}(t_1) H_{int}(t_2) \cdots H_{int}(t_n)$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i/\hbar)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n P(H_{int}(t_1) H_{int}(t_2) \cdots H_{int}(t_n)) \\
 &\hspace{10em} \uparrow \text{時間の順序にならびかえる} \\
 &= T \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt H_{int}(t)\right) \quad \text{Dyson の公式} \\
 &\quad T \text{ 記号について: } T(F_1(t_1) \cdots F_n(t_n)) = \epsilon_p P(F_1(t_1) \cdots F_n(t_n)) \\
 &\hspace{10em} \epsilon_p \text{ は左辺と右辺の配列が偶置換なら } +1, \text{ 奇置換なら } -1
 \end{aligned}$$

実際の多くの問題では、 $t_0 = -\infty, t = +\infty$ の状態を求めることが多い。その場合、 $t = -\infty$ では相互作用項がなく、それ以降、相互作用項が徐々に加わり、 $t = +\infty$ で再び消滅すると考えるのである。これを断熱操作とよぶ。

$$\begin{aligned}
 \psi(\infty) &= S \psi(-\infty) \\
 S &= U(\infty, -\infty)
 \end{aligned}$$

この S を、 S 行列 (scattering matrix 散乱行列) という。

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i/\hbar)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n P(H_{int}(t_1) H_{int}(t_2) \cdots H_{int}(t_n))$$

1 次までとった摂動計算 $S \approx 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 H_{int}(t_1)$ では、定性的にはかなり事実を説明する結果が得られる。

しかし、さらに高次の近似を求めようとすると、無限大があらわれる。—— 発散の困難。

S 行列は、ずっと過去に自由粒子がいくつかある状態、すなわち H_0 の固有状態 ψ_i が時間の経過とともに加えられた相互作用の結果、はるか未来で再び自由粒子の集まりになるとき、その状態が H_0 の別の固有状態 ψ_f に見出される確率振幅

$$S_{fi} = \langle \psi_f, S \psi_i \rangle \text{ を与える。}$$

ここで、最初の状態がそのまま最終状態になる部分は興味がないのでこれを分け、

$$S_{fi} = \delta_{fi} - (2\pi\hbar)^4 i \delta^4(P^f - P^i) T_{fi} \text{ とあらわす。}$$

この T を遷移行列という。

③ くりこみ理論 光・電子系の例で $\hbar, c = 1$ の単位系

$S = 1 + \sum S^{(n)}$ の近似計算で、1 次までとって $S = 1 - i \int d^4x_1 H(x_1)$ とした場合、定性的にはかなり事実を説明する結果が得られるが、さらに高次補正を行うと発散量があらわれる。

たとえば、 $S^{(2)}$ の中には電子が光を放出してすぐまた吸収するという過程に対応して、電子の自己エネルギー一部分といわれる $S_e^{(2)}$ があらわれ、

$$S^{(2)} = S_e^{(2)} + S_f^{(2)} = -iA \int \psi^\dagger \psi d^4x + S_f^{(2)} \text{ の形になる。}$$

ここで、 A は対数的発散数であり、 $S_f^{(2)}$ は有限部分である。

さて、 $S_e^{(2)}$ を次の物理的解釈によって切り捨ててしまうのがいわゆる質量のくりこみである。

$$H = H_e + H_p + H_I, \quad H_e = \psi^\dagger \left(\gamma_k \frac{\partial}{\partial x_k} + m \right) \psi, \quad H_I = ie \psi^\dagger \gamma_\mu A_\mu \psi$$

電子の自己エネルギーというのは、電子が光を吸ったり吐いたりするのだから、裸の質量 m を観測質量 $m' = m + \delta m$ に増加させる効果をもつと考える。

$$\text{すると、} H_e = \psi^\dagger \left(\gamma_k \frac{\partial}{\partial x_k} + m' \right) \psi - \psi^\dagger \psi \delta m = H_e' - \psi^\dagger \psi \delta m \text{ と書ける。}$$

$$H = H_e' + H_p + H_I' \text{ より、} H_I' = H_I - \psi^\dagger \psi \delta m$$

H_I のかわりに H_I' を用いれば、2 次までの摂動で、

$$S = 1 - i \int H_I(x) d^4x + i \delta m \int \psi^\dagger \psi d^4x - iA \int \psi^\dagger \psi d^4x + S_f^{(2)}$$

となり、 $\delta m = A$ とおけば、発散項はなくなるというものである。

矛盾： 最初は δm は有限だとみなし、あとでは $\delta m = A = \infty$ となっている。
しかし、この摂動計算は事実を驚くほどよく説明し得たのである。