はじめに（一般相対性理論）

アインシュタインは、特殊相対性理論につづいて、慣性系のみならず非慣性系をも含む一般的な相対性の原理を定式化したとよく間違えられるが、これは正しくはない。このような試みは、相対性原理自体からすべての物理的内容を取り去ることによってしか達せられないであろう。現実に、物理的内容のある「一般相対性理論」と名付けられるものは、実際には、非慣性系への拡張ではなく、万有引力の理論である。その意味で「特殊」とか「一般」とかはあまり正確ではなく、相対性理論と重力理論である。

等価原理

重力場の基本的な特徴は、そのなかでは初期条件さえ同じならば、すべての物体がその質量や電荷にかかわりなく、同じように運動するということである。重力場での運動と非慣性基準系からみた運動との間に、本質的な類比を求めることができる。すなわち、非慣性基準系は、適当な重力場に同等である。これを『等価原理』という。

しかし、非慣性基準系で生じるみかけの重力場は、真の重力場と同じではない。無限遠において、真の重力場はゼロに向かうのに対して、前者は有限か無限大（例えば、円運動のとき）となるからである。また、前者は基準系をかえることによって打ち消せるのに対して、後者は、完全に打ち消せない。ただ、局所的に可能なだけである。

相対論的力学における重力場

慣性基準系では、デカルト座標を使ったとき、世界間隔 ds は、

$ds^2 = d(ct)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ となり、

これが、慣性座標間の座標変換（ローレンツ変換）に対して不変であった。

しかし、非慣性系となると、世界間隔はもっと一般的な二次形式となり、

$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$ となる。

すなわち、曲線座標を導入し、この曲線座標の幾何学的性質を決定するのが g_{ij} である。また、非慣性系は、ある重力場に同等であるといったが、これらの場が g_{ij} によって決定されるのである。このような相対性理論にもとづいてつくられた重力場の理論は、一般相対性理論とよばれる。

非慣性基準系は、座標変換によって g_{ij} をガリレイ的なものにすることができるが、真の重力場は、全空間でガリレイ的なものにすることができない（局所的には可能）。そのような時空は、そういった変換が可能な平坦な時空と区別して、曲がっているといわれる。

リーマン（Rieman）幾何学

リーマン空間 R_n では、その中の各点において、基本(計量)テンソル g_{ij} が与えられており、
$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}$ との間の距離 ds が
$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$ であらわせせる。　空間の計量
ds は、座標系によって不変。

R 上の任意の点 $p \longrightarrow$ R′ 上の点 p' への写像で $ds = ds'$ ならば、
この写像（R $\longrightarrow$ R′）を計量写像という。

R_n を R_n 自身に移すような計量写像は、１つの群を作っている。これを R_n の運動群 $\mathscr{M}$ という。
$\mathscr{M}$ の次元数 $\leqq \dfrac{n(n+1)}{2}$

R_n の中の１点 o を、R_n の中の任意の点 p に移すような計量写像が、$\mathscr{M}$ の中に必ず含まれているとき、R_n の中のすべての点が同等になり、このような空間は一様であるという。（平行移動に対して変化しない）

R_n の１点 o を、それ自身に移すような $\mathscr{M}$ の部分集合を、o のまわりの回転群 $\mathscr{R}$ という。
o のまわりの回転群 $\mathscr{R}$ の次元数が $\dfrac{n(n-1)}{2}$ であれば、o のまわりのどの方向も同等になる。
この場合、R_n は点 o のまわりで等方性があるという。（回転変換に対して変化しない）

R_n は一様で、等方性 $\rightleftarrows$ R_n は次元数 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ の $\mathscr{M}$ をもつ
R_n が、その中の任意の点 p のまわりで等方性をもつ $\longrightarrow$ R_n は一様

---

g_{ij} が場所、時間とともに変化する。
$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$ が不変。　　$g_{ij} = g_{ji}$　対称（16 成分のうち独立成分は 10 個）

反変ベクトル　$A'^i = \dfrac{\partial x'^i}{\partial x^j} A^j$
共変ベクトル　$A'_i = \dfrac{\partial x^i}{\partial x'^j} A_j$

$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$ は不変だから、g_{ij} は共変テンソル。
$g'_{ij} = \dfrac{\partial x^k}{\partial x'^i} \dfrac{\partial x^l}{\partial x'^j} g_{kl}$

g_{ij} の逆行列を g^{ij} とおく。　g^{ij} は反変テンソル。
$g_{ij}\, g^{jk} = \delta_i^k$（ $i = k$ のとき 1 、$i \neq k$ のとき 0 ）
δ_i^i は次元数をあらわす。

反変・共変の相互変換
$g_{ij} A^j = A_i$
$g^{ij} A_j = A^i$

準備（クリストッフェル記号）

ここでの目標は、曲がった空間内でのベクトルの平行移動がどのようにあらわせるかということになる。
結論から述べると、クリストッフェル記号を用いて、次のようになる。

$dA_j = \Gamma^i{}_{jk} A_i \, dx^k$ 　共変ベクトルの平行移動

$dA^j = -\Gamma^j{}_{lk} A^l \, dx^k$ 　反変ベクトルの平行移動

---

4 次元の物理空間が、N 次元 ($N > 4$) の平らな空間に埋め込まれていると考える。
この N 次元空間に、直線座標 Z^n（直交でなくてもよい）を置く。
隣接した 2 点の間には、

$ds^2 = h_{nm} \, dz^n \, dz^m$ 　で定まる不変距離がある。

$n, m = 1, 2, \cdots\cdots\cdots, N$

h_{nm} は定数（平らな空間）

この N 次元空間のなかで、物理空間は 4 次元の曲面をなす。
曲面上の各点を、物理空間座標で x^i、N 次元空間座標で y^n とする。

$y^n = y^n(\boldsymbol{x})$

この N 個の方程式から 4 個の x^i を消去すれば、$N-4$ 個の方程式が残って、N 次元空間のなかの曲面を定める。

$$\delta y^n = \frac{\partial y^n}{\partial x^i} \, \delta x^i$$

$$\begin{aligned}
\delta s^2 &= h_{nm} \, \delta y^n \, \delta y^m \\
&= h_{nm} \frac{\partial y^n}{\partial x^i} \frac{\partial y^m}{\partial x^j} \, \delta x^i \, \delta x^j \\
&= \frac{\partial y^n}{\partial x^i} \frac{\partial y_n}{\partial x^j} \, \delta x^i \, \delta x^j \qquad y_n = h_{nm} y^m \text{（}h_{nm} \text{ は定数）}
\end{aligned}$$

$\delta s^2 = g_{ij} \, \delta x^i \, \delta x^j$ 　だから、

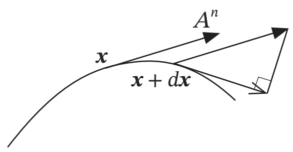
$$g_{ij} = \frac{\partial y^n}{\partial x^i} \frac{\partial y_n}{\partial x^j} \qquad \text{————} \quad ①$$

物理空間の点 $\boldsymbol{x}$ に反変ベクトル A^i があるとする。
これを N 次元空間でみると、反変ベクトル A^n となる。

$$A^n = \frac{\partial y^n}{\partial x^i} A^i \qquad \text{————} \quad ②$$

これを A^n 自身に平行に隣の点 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{dx}$ に移すと、もはや新しい点ではベクトルは曲面内にはおさまらない。しかし、それを曲面上へ射影することで、曲面内におさまるベクトルをつくることができる。
この $A^n_{\text{接線}}$ を x 座標系にひきなおして K^i と書けば、

$$A^n_{\text{接線}} = \left(\frac{\partial y^n}{\partial x^i}\right)_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{dx}} K^i \qquad \text{（接線ベクトル）}$$



$h_{nm} A^n_{\text{法線}} A^m_{\text{接線}} = 0$ 　直交

$$= h_{nm} A^n_{\text{法線}} \left(\frac{\partial y^m}{\partial x^i}\right)_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{dx}} K^i = A^n_{\text{法線}} \left(\frac{\partial y_n}{\partial x^i}\right)_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{dx}} K^i \qquad y_n = h_{nm} y^m \text{（}h_{nm} \text{ は定数）}$$

K^i にかかわらず、これが 0 となるためには、

$$A^n_{\text{法線}} \left(\frac{\partial y_n}{\partial x^i}\right)_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{dx}} = 0$$

$$\begin{aligned}
A^n \left(\frac{\partial y_n}{\partial x^j}\right)_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{dx}} &= \left(A^n_{\text{法線}} + A^n_{\text{接線}}\right) \left(\frac{\partial y_n}{\partial x^j}\right)_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{dx}} \\
&= A^n_{\text{接線}} \left(\frac{\partial y_n}{\partial x^j}\right)_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{dx}} \\
&= K^i \left(\frac{\partial y^n}{\partial x^i}\right)_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{dx}} \left(\frac{\partial y_n}{\partial x^j}\right)_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{dx}} \\
&= K^i g_{ij(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{dx})} \qquad \leftarrow \text{①より} \\
&= K_{j(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{dx})}
\end{aligned}$$

したがって、

$$K_{j(x+dx)} = A^n \left(\frac{\partial y_n}{\partial x^j}\right)_{x+dx} = A^n \left[\left(\frac{\partial y_n}{\partial x^j}\right)_x + \frac{\partial \left(\frac{\partial y_n}{\partial x^j}\right)_x}{\partial x^k} dx^k \right]$$ 1 次近似まで

$$= A^i \left(\frac{\partial y^n}{\partial x^i}\right)_x \left[\qquad \text{〃} \qquad \right]$$ ← ②より

$$= A_j + A^i \left(\frac{\partial y^n}{\partial x^i}\right)_x \frac{\partial \left(\frac{\partial y_n}{\partial x^j}\right)_x}{\partial x^k} dx^k$$ ← ①より

$$dA_j = K_j - A_j = A^i \left(\frac{\partial y^n}{\partial x^i}\right)_x \frac{\partial \left(\frac{\partial y_n}{\partial x^j}\right)_x}{\partial x^k} dx^k \qquad \text{———} \quad ③$$

$g_{ij} = \dfrac{\partial y^n}{\partial x^i} \dfrac{\partial y_n}{\partial x^j}$ を微分すると、 ← ①参照

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial \left(\frac{\partial y^n}{\partial x^i}\right)}{\partial x^k} \frac{\partial y_n}{\partial x^j} + \frac{\partial y^n}{\partial x^i} \frac{\partial \left(\frac{\partial y_n}{\partial x^j}\right)}{\partial x^k}$$

$$= \frac{\partial \left(\frac{\partial y_n}{\partial x^i}\right)}{\partial x^k} \frac{\partial y^n}{\partial x^j} + \quad \text{〃}$$ ← h_{nm} は定数

$\dfrac{1}{2} \left(\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \dfrac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right) = \dfrac{\partial \left(\frac{\partial y_n}{\partial x^j}\right)}{\partial x^k} \dfrac{\partial y^n}{\partial x^i} = \Gamma_{i,jk}$ とおく。（第一種のクリストッフェル記号 / 似非テンソル　j 、k について対称）　　$\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$ 等は似非テンソル

$$\Gamma_{i,jk} + \Gamma_{j,ik} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \qquad \text{———} \quad ④$$

$$dA_j = A^i \Gamma_{i,jk} dx^k$$ ← ③より

これで、N 次元空間をひきあいに出す必要が、まったくなくなった。というのは、Γ は物理空間の計量テンソル g_{ij} にのみ、かかわるものだからである。

$\Gamma^i{}_{jk} = g^{il} \Gamma_{l,jk}$ とおくと、（第二種のクリストッフェル記号 / 似非テンソル。　j 、k について対称）
$\underline{dA_j = \Gamma^i{}_{jk} A_i dx^k}$ となる。　　共変ベクトルの平行移動

$$g_{im} \Gamma^m{}_{jk} = g_{im} g^{ml} \Gamma_{l,jk}$$
$$= \delta^l_i \Gamma_{l,jk}$$
$$= \Gamma_{i,jk}$$

$$dA^j = d(g^{ij} A_i)$$
$$= \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} dx^k A_i + g^{ij} dA_i \qquad \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} = -g^{il} g^{jm} \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k}$$ （下欄参照）
$$= -g^{il} g^{jm} \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} dx^k A_i + g^{ij} A^l \Gamma_{l,ik} dx^k$$
$$= -A^l g^{jm} \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} dx^k + \quad \text{〃}$$
$$= A^l g^{ij} dx^k \left(\Gamma_{l,ik} - \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} \right)$$
$$= -A^l g^{ij} dx^k \Gamma_{i,lk}$$ ← ④より

$\underline{dA^j = -\Gamma^j{}_{lk} A^l dx^k}$ 　　反変ベクトルの平行移動

$$d(A^j B_j) = dA^j B_j + A^j dB_j$$
$$= -\Gamma^j{}_{lk} A^l dx^k B_j + A^j \Gamma^l{}_{jk} B_l dx^k$$
$$= 0$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} &= \delta_m{}^i \frac{\partial g^{mj}}{\partial x^k} \\
&= g^{il} g_{lm} \frac{\partial g^{mj}}{\partial x^k} \qquad \text{page18 参照} \\
&= g^{il} \left(\frac{\partial (g_{lm} g^{mj})}{\partial x^k} - g^{mj} \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} \right) \\
&= g^{il} \left(\frac{\partial \delta_l^j}{\partial x^k} - g^{mj} \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} \right) \\
&= -g^{il} g^{mj} \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k}
\end{aligned}
$$

測地線

ユークリッド空間で直線といえば、曲がることのない線である。リーマン空間で、一般に直線というものはないが、『曲がらない』ということを『自分自身に平行である』という性質と考えれば、ユークリッド空間の直線に対応する曲線が得られる。これを、測地線という。

座標の点 x^i をとり、あるパラメータ ξ によって動くものとする。

このとき、$\dfrac{dx^i}{d\xi} = u^i$ とおき、u^i が平行移動をうけるように動かすのである。

このようにしてつくられた軌道が測地線。

もし ξ として時間を使っていたならば u^i は速度ベクトルを意味することになる。しかし ξ は別に時間でなくてもいい。要するに u^i はどの方向へ向かっているかを表しているのであり、曲面上にいる人にとっての、曲線コースの接線ベクトルである。
たとえどんな座標軸が描かれていようとも、たとえ我々が進んでいる方向を示している接線ベクトル u^i の値が目まぐるしく変化し続けようとも、その変化が座標の上を平行移動した事のみによる変化だということが保証されていればそれで真っ直ぐ進んだことになる。

$$\frac{du^i}{d\xi} + \Gamma^i{}_{jk}\, u^j \frac{dx^k}{d\xi} = 0$$

パラメータ ξ を、固有時 s とおくと、速度ベクトル $v^i = \dfrac{dx^i}{ds}$ に一致する。（固有時については、page8 参照）

$$\frac{dv^i}{ds} + \Gamma^i{}_{jk}\, v^j v^k = 0 \qquad \text{あるいは、} \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i{}_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0$$

空間が平坦である場合は、$\dfrac{dv^i}{ds} = 0$ となる。つまり、v^i は s の 1 次式であり 通常の直線（運動）の方程式を表すものとなる。

仮定

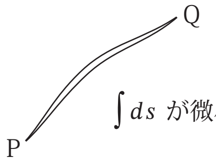
①重力のほかにどんな力も受けない質点の世界線は時間的な（パラメータ s）測地線である。
　これが、ニュートン力学の第一法則にとってかわる。

②光の経路は、ゼロ測地線である。
　その ξ として、固有時 s をとることはできない。$ds = 0$ だからである。

　それに沿って、$ds = 0$ であるような測地線は、ゼロ測地線とよばれる。
　このとき、u^i の長さはゼロである。$g_{ij}\, u^i u^j = 0$

測地線の停留性

　測地線である　⇔　$\int ds$ が停留性をもつ



$\int ds$ が微小変形によって変わらない

共変微分

S をスカラーとすると、$\frac{\partial S}{\partial x^i}$ が共変ベクトルになることは、すでにのべた。しかし、$\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ は共変テンソルとはならず、似非テンソルにすぎない（下欄参照）。これを、微分手続きを変更して、共変テンソルを得ることはできないだろうか。

$$A_{i(x+dx)}-\underbrace{\{A_{i(x)}+\Gamma^{j}{}_{ik}A_j\,dx^k\}}_{A_{i(x)}\text{を}x+dx\text{まで平行移動したもの}} = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^k}-\Gamma^{j}{}_{ik}A_j\right)dx^k$$

これは、ベクトルであるから、商定理より、

$\frac{\partial A_i}{\partial x^k}-\Gamma^{j}{}_{ik}A_j$ は、テンソルである。これを、$A_{i:k}$ であらわす。

$$A_{i:k}=\frac{\partial A_i}{\partial x^k}-\Gamma^{j}{}_{ik}A_j$$

同じように、反変ベクトルの場合は、$A^{i}{}_{:k}=\frac{\partial A^i}{\partial x^k}+\Gamma^{i}{}_{jk}A^j$

テンソル T_{ij} の場合は、は $T_{ij}=A_iB_j$ であらわせるから A_iB_j で検討する。

共変微分を、次のように定義する。

$(A_iB_j)_{:k}=A_{i:k}B_j+A_iB_{j:k}$　　これは、明らかにテンソルである。

$$=\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^k}-\Gamma^{l}{}_{ik}A_l\right)B_j+A_i\left(\frac{\partial B_j}{\partial x^k}-\Gamma^{l}{}_{jk}B_l\right)$$

$$=\frac{\partial(A_iB_j)}{\partial x^k}-\Gamma^{l}{}_{ik}A_lB_j-\Gamma^{l}{}_{jk}A_iB_l\,)$$

すなわち、

$$T_{ij:k}=\frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k}-\Gamma^{l}{}_{ik}T_{lj}-\Gamma^{l}{}_{jk}T_{il}$$

計量テンソルを共変微分すると、0 になる。

$$g_{ij:k}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}-\Gamma^{l}{}_{ik}g_{lj}-\Gamma^{l}{}_{jk}g_{il}$$

page18 $g_{ij}g^{jk}=\delta^k_i$ より $\Gamma^{l}{}_{ik}g_{lj}=g^{ml}\Gamma_{m,ik}g_{lj}=\delta^m_j\Gamma_{m,ik}=\Gamma_{j,ik}$

$$=\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}-\Gamma_{j,ik}-\Gamma_{i,jk}$$

page20 ④参照

$$=0$$

一般に共変微分を、次のように定義する。

$$Y^{ab\cdots}{}_{ij\cdots:k}=\frac{\partial Y^{ab\cdots}{}_{ij\cdots}}{\partial x^k}+\Gamma^{a}{}_{lk}Y^{lb\cdots}{}_{ij\cdots}+\Gamma^{b}{}_{lk}Y^{al\cdots}{}_{ij\cdots}+\cdots\cdots-\Gamma^{l}{}_{ik}Y^{ab\cdots}{}_{lj\cdots}-\Gamma^{l}{}_{jk}Y^{ab\cdots}{}_{il\cdots}-\cdots\cdots$$

当然、スカラー S の場合は、$S_{:k}=\frac{\partial S}{\partial x^k}$

X、Y を任意のテンソルとすると

$(XY)_{:k}=X_{:k}Y+XY_{:k}$ がなりたつ。　　証明略

物理法則は、どんな座標系においても、あまねくなりたつのでなければならない。だから、そのなかに場の量の微分が含まれるとき、それは共変微分でなければならない。物理学における場の方程式は、すべて書き換えてふつうの微分を共変微分に直す必要がある。

$\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ は、似非テンソルなので計算にはつねに注意が必要。

$$A'_i=\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}A_k$$

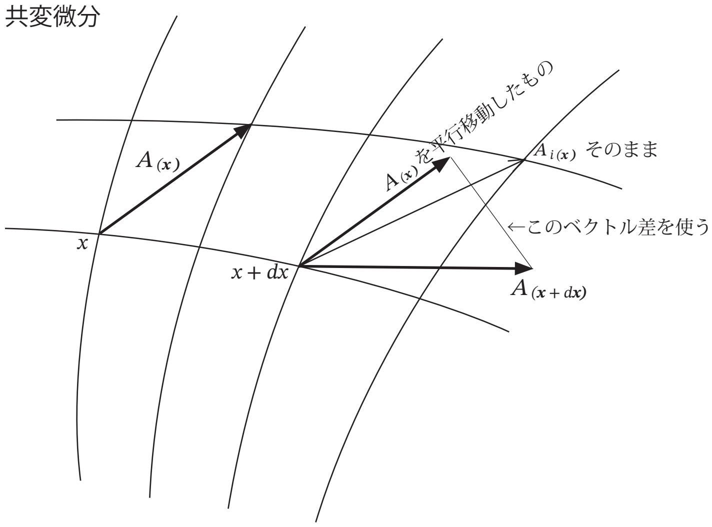
$$\frac{\partial A'_i}{\partial x'^j}=\frac{\partial}{\partial x'^j}\left(\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}A_k\right)$$

$$= A_k \frac{\partial}{\partial x'^j} \left(\frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \right) + \frac{\partial A_k}{\partial x'^j} \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}$$

$$= A_k \frac{\partial}{\partial x'^j} \left(\frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \right) + \frac{\partial A_k}{\partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial x'^j} \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}$$

第一項目が余計なものとして加わっていることがわかる。

共変微分



曲率テンソル

微分を２度つづけて行うとき、順序はどうでもよいというふつうの微分の重要な性質が、共変微分に対して一般的にはなりたたない。

スカラー場 S の場合は、$S_{:k:l} = S_{:l:k}$ で問題はない。

ベクトル場 A_j の場合は、
T_{jk} を $A_{j:k}$ とみて、

$A_{j:k:l} = \dfrac{\partial A_{j:k}}{\partial x^l} - \Gamma^m{}_{jl} A_{m:k} - \Gamma^m{}_{kl} A_{j:m}$　　さらに、$A_{i:k} = \dfrac{\partial A_i}{\partial x^k} - \Gamma^j{}_{ik} A_j$ を代入していく。

$= \cdots\cdots\cdots\cdots$　以下略

この長くなる計算結果から、$A_{j:k:l}$ の k と l をとりかえたものを引けば、最終的に、

$A_{j:k:l} - A_{j:l:k} = A_i R^i{}_{jkl}$　　左辺はテンソルだから、商定理より $R^i{}_{jkl}$ もテンソル

ただし、$R^i{}_{jkl} = \dfrac{\partial \Gamma^i{}_{jl}}{\partial x^k} - \dfrac{\partial \Gamma^i{}_{jk}}{\partial x^l} + \Gamma^m{}_{jl}\Gamma^i{}_{mk} - \Gamma^m{}_{jk}\Gamma^i{}_{ml}$

この $R^i{}_{jkl}$ を、曲率テンソルとよぶ。

$R^i{}_{jkl} = -R^i{}_{jlk}$

$R^i{}_{jkl} + R^i{}_{klj} + R^i{}_{ljk} = 0$

$R_{ijkl} = g_{ia} R^a{}_{jkl}$　　定義 $\Gamma^i{}_{jk} = g^{il}\Gamma_{l,jk}$ 、さらに、$g_{ij}g^{jk} = \delta^k_i$ 、$\Gamma_{i,jk} + \Gamma_{j,ik} = \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$ より　page20 参照

$= \dfrac{\partial \Gamma_{i,jl}}{\partial x^k} - \dfrac{\partial \Gamma_{i,jk}}{\partial x^l} - \Gamma_{m,ik}\Gamma^m{}_{jl} + \Gamma_{m,il}\Gamma^m{}_{jk}$

$R_{ijkl} = -R_{jikl}$

$R_{ijkl} = R_{klij} = R_{lkji}$

こうした対称性のため、R_{ijkl} の 256 個の成分のうちで 20 個だけが独立ということになる。

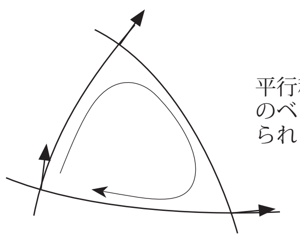
テンソル T_{ij} の場合は、

$T_{ij:k:l} - T_{ij:l:k} = T_{mj} R^m{}_{ikl} + T_{im} R^m{}_{jkl}$

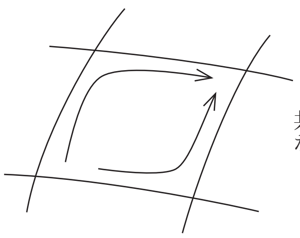
ビアンキ恒等式

$R^i{}_{jkl:m} + R^i{}_{jlm:k} + R^i{}_{jmk:l} = 0$

空間が平らであれば、直線座標がとれて、g_{ij} は定数となり、曲率テンソル R_{ijkl} は 0 になる。
逆に、$R_{ijkl} = 0$ なら、空間は平らである。　　証明略



平行移動して一循すると、もとのベクトルと違うベクトルが得られる。



共変微分の順序によって、ことなる値がえられる。

リッチ・テンソル

テンソルの縮約について

上付きの添え字と下付きの添え字が同じになる成分の和を取ると、その２つの添え字を消したテンソルと同じになる。たとえば、$A^{\mu\nu}{}_{\lambda\rho}$ というような４階の混合テンソルがあったとして、μ と λ が同じになる成分の和を取ると、

$A^{\mu\nu}{}_{\mu\rho} = A^{\nu}{}_{\rho}$

というように、２階の混合テンソルとして扱えるようになる。

$R^{m}{}_{imj} = R_{ij}$　　これをリッチ・テンソルという。

$R_{ij} = R_{ji}$　　対称

$R_{ij} = R^{m}{}_{imj} = R_{i}{}^{m}{}_{jm} = R_{mj}{}^{m}{}_{i} = R_{jmi}{}^{m}$

$\quad = -R^{m}{}_{ijm} = -R_{i}{}^{m}{}_{mj} = -R_{jm}{}^{m}{}_{i} = -R_{mji}{}^{m}$

$R^{m}{}_{mij} = R_{m}{}^{m}{}_{ij} = R_{ij}{}^{m}{}_{m} = R_{ijm}{}^{m} = 0$

$g^{ij}R_{ij} = R^{i}_{i} = R$　　これをスカラ曲率または全曲率という。

$R^{m}{}_{nij:k} + R^{m}{}_{njk:i} + R^{m}{}_{nki:j} = 0$　　ビアンキ恒等式

$k = m$ とおき、g^{ni} をかける。　　g^{ij} は共変微分に対して定数なみ　$g^{ij}{}_{:k} = 0$　　page23

$(g^{ni}R^{m}{}_{nij})_{:m} + (g^{ni}R^{m}{}_{njm})_{:i} + (g^{ni}R^{m}{}_{nmi})_{:j} = 0$

$(g^{ni}g^{ml}R_{lnij})_{:m} + (g^{ni}R_{nj})_{:i} - (g^{ni}R_{ni})_{:j} = 0$

$(g^{ml}R_{lj})_{:m} + (g^{ni}R_{nj})_{:i} - R_{:j} = 0$

$2R^{m}_{j:m} - R_{:j} = 0$　　g^{ij} をかけると

$2R^{im}{}_{:m} - (g^{ij}R)_{:j} = 0$

$(2R^{im} - g^{im}R)_{:m} = 0$　　リッチ・テンソルに対するビアンキ恒等式

R_{ij} のあからさまな形

$$R_{ij} = R^{m}{}_{imj} = \frac{\partial \Gamma^{m}{}_{ij}}{\partial x^{m}} - \frac{\partial \Gamma^{m}{}_{im}}{\partial x^{j}} + \Gamma^{k}{}_{ij}\Gamma^{m}{}_{km} - \Gamma^{k}{}_{im}\Gamma^{m}{}_{kj}$$

アインシュタインの仮定

からっぽの空間（物質も存在せず、重力場のほかには、どんな物理的な場も存在しないことを意味する）では、

$R_{ij} = 0$ が成り立つ。　　重力の法則

一般相対性の原理

リーマン時空の一点 P において、線形の座標変換により、基本テンソル g_{ij} を対角化して、$ds=(dx'^0)^2-(dx'^1)^2-(dx'^2)^2-(dx'^3)^2$ とし、さらに、測地線座標になおすと、点 P でこのリーマン時空に接するミンコフスキー時空を得る。
このミンコフスキー時空で、物理法則を特殊相対論による形であらわしておき、これをもとの時空にもどせば、一般の空間における物理法則の形がわかる。
一般の時空には、ミンコフスキー時空の慣性座標系に対応するような特別な役割をもつ（大域の）座標系は存在しない。そのかわり、すべての座標系が同等の立場をもっており、物理法則はいかなる座標変換を行ってもその表現の形が保たれるように、共変性をもったテンソル方程式として書かれねばならない。これを、一般相対性の原理という。

計算上の注意点

ガリレイ座標では、ベクトル A_i の微分 dA_i はベクトルで、$\frac{\partial A_i}{\partial x^j}$ はテンソルである。しかし、曲線座標では、そうはならない。 dA_i はベクトルでなく、$\frac{\partial A_i}{\partial x^j}$ はテンソルではない。それは、dA_i が異なる点に位置するベクトル差だからであり、曲線座標において、$A_{i(\boldsymbol{x})}$ を $\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}$ に平行移動しても $A_{i(\boldsymbol{x})}$ にはならないからである。

$$A'_i=\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}A_k$$

$$dA'_i=d\left(\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\right)A_k+\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}dA_k$$

$$\frac{\partial A'_i}{\partial x'^j}=\frac{\partial}{\partial x'^j}\left(\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}A_k\right)$$

$$=A_k\frac{\partial}{\partial x'^j}\left(\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\right)+\frac{\partial A_k}{\partial x'^j}\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}$$

$$=A_k\frac{\partial}{\partial x'^j}\left(\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\right)+\frac{\partial A_k}{\partial x^m}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}$$

それぞれ、曲線座標では第一項目が 0 にはならない。これが 0 になるのは、x^k が x'^i の 1 次関数のときのみである。

若干の計量関係の公式

$g_{ij}=g_{ji}$　対称

$g_{ij}g^{jk}=\delta_i^k$

$g_{ij:k}=0$　　$g^{ij}{}_{:k}=0$　　$g^i{}_{j:k}=0$　　共変微分に対してあたかも定数のようにふるまう

$$g=|g_{ij}|=\frac{1}{|g^{ij}|}$$

$$\frac{\partial g}{\partial g_{ij}}=g\,g^{ij}\qquad\frac{\partial g}{\partial g^{ij}}=-g\,g_{ij}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x^k}=\frac{\partial g}{\partial g_{ij}}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}=g\,g^{ij}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$$

$$\Gamma^i{}_{ik}=g^{ij}\Gamma_{j,ik}=\frac{1}{2}g^{ij}\left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\right)$$

$g^{ij}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\right)$ は i、j に対して反対称かつ同等だから 0。

$$=\frac{1}{2}g^{ij}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}=\frac{1}{2}\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^k}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^k}$$

$$=\frac{\partial\log\sqrt{-g}}{\partial x^k}\qquad(g<0)$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}=-g^{im}g^{jn}\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k}\qquad\because\ \frac{\partial(g^{im}g_{mn})}{\partial x^k}=\frac{\partial g^i_n}{\partial x^k}=0$$

page21 参照

$$\frac{\partial g^{im}}{\partial x^k}g_{mn}+g^{im}\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k}=0$$

両辺に g^{jn} をかける

このあたりでもとの議論にもどる。

ミンコフスキー時空で $\frac{d^2x^i}{d\xi^2}=0$ なら、　（ξ はあるパラメータ）

重力場では、$\frac{d^2x^i}{d\xi^2}+\Gamma^i{}_{jk}\frac{dx^j}{d\xi}\frac{dx^k}{d\xi}=0$ となる。　page22 測地線参照。

質点のときは、ξ を固有時間 s とすると、速度ベクトルを $v^i = \dfrac{dx^i}{ds}$ として、
運動方程式 $\dfrac{dv^i}{ds} + \Gamma^i{}_{jk}\, v^j\, v^k = 0$ となる。

光の伝播のときは、$ds = 0$ だから、これは使えない。
そこで、幾何光学における伝播の方向は、波動ベクトルによってきまるということを利用する。

$f = ae^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \alpha)} = ae^{i\psi}$

$\boldsymbol{k} = \dfrac{\omega}{c}\,\boldsymbol{n}$ 　　$\boldsymbol{n}$ は伝播方向の単位ベクトル、ω は振動数

$k^i = (\dfrac{\omega}{c}, \boldsymbol{k})$ 　　4 次元の波動ベクトル

4 次元波動ベクトルは、λ をあるパラメータとして、$k^i = \dfrac{\partial x^i}{\partial \lambda}$ の形に書くことができる。

ミンコフスキー時空では、$\dfrac{dk^i}{d\lambda} = 0$ だから、

重力場では、$\dfrac{dk^i}{d\lambda} + \Gamma^i{}_{jk}\, k^j\, k^k = 0$

$k_i\, k^i = 0$

または、$\dfrac{d^2x^i}{d\lambda^2} + \Gamma^i{}_{jk}\dfrac{dx^j}{d\lambda}\dfrac{dx^k}{d\lambda} = 0$

$g_{ij}\, dx^i\, dx^j = 0$

重力による赤方偏移（静的な重力場）

$dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$

$ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{00}\,(dx^0)^2$ 　　$d\tau$ は「真の時間」（下枠コラム参照）。

$\omega_0 = -c\dfrac{\partial \psi}{\partial x^0}$ 　　x^0 であらわした振動数。不変な重力場では、これは光が伝播していくあいだ一定。

$\omega = -\dfrac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x^0}\dfrac{\partial x^0}{\partial \tau} = \dfrac{\omega_0}{\sqrt{g_{00}}}$ 　　固有時間であらわした振動数。g_{00} のちがいによって、これはことなってくる。

光の振動数は、重力場のポテンシャル（物体から遠く離れたところをゼロとすると、物体に近づくにつれて大きなマイナス値となっていく）の絶対値が増大するとともに、すなわち、場を生ずる物体に近づくにつれて大きくなることがわかる。逆に、光がこれらの物体から遠ざかると、振動数は減少する。
たとえば、太陽のうえの原子から放出される線スペクトルをその場でみると、地球の上で同じ原子が放出する線スペクトルをみたときと同じようにみえる。ところが、太陽上の原子から発せられたスペクトルを地球上でみると、その線を地球上で発せられた同じスペクトル線とくらべてずれてみえる。＝振動数は減少する → 赤方偏移。

Column //

一般相対性理論では、座標系の選択には本質的な制限はない。３つの空間座標 x^μ は、物体の空間内の位置をきめる量ならなんでもよいし、時間座標 x^0 は、どんな動き方をする時計によっても定義できる。
そこで、どのようにすれば、実際の距離と時間間隔を知ることができるのだろうか。

真の時間

問題にしている小領域に対して静止したガリレイ的な基準系になおしたとき、空間の同一点で生じる２つの事象のあいだの時間。
真の時間 $d\tau$（ガリレイ的なものになおしたときの固有時間。粒子とともに運動する標準時計で測った時間）
世界間隔 ds は、$cd\tau$ にほかならない。

$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$

$dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$ とおくと、

$ds^2 = g_{00}\,(dx^0)^2 = c^2 d\tau^2$

すなわち、真の時間　$d\tau = \dfrac{\sqrt{g_{00}}}{c}\, dx^0$

重力による赤方偏移

$ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{00}\,(dx^0)^2$

それぞれの時間ではかった周期を $\Delta\tau$、Δt とすれば、

$\Delta\tau^2 = g_{00}\,\Delta t^2$

静的な重力場の場合、Δt は光の伝播によって不変。

しかし、g_{00} は変化するので、$\Delta\tau$ は g_{00} によって影響をうけることになる。

標準時計の進み方は、その時計が置かれている場所におけるスカラー重力ポテンシャルに依存する。そして、巨大な物体の近く＝重力ポテンシャルが低くなるほど、進む速さも小さくなる。（巨大な物体の近くにいるほど、時間の進み方は遅くなる。重力ポテンシャルの低い惑星上では、重力ポテンシャルの高い宇宙空間に比べて時間がゆっくり進むことになる。例えば、地球上（正確には、ジオイド表面上）で 1 秒当たり 100 億分の 7 秒遅くなる。）

真の距離

$dl^2 = (-g_{\mu\nu} + \dfrac{g_{0\mu}\,g_{0\nu}}{g_{00}})\,dx^\mu dx^\nu$　　計算略

$\gamma_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} + \dfrac{g_{0\mu}\,g_{0\nu}}{g_{00}}$　　$\gamma_{\mu\nu}$ は空間部分をあらわす計量テンソルのようなものとなる

同期化された基準系（$g_{00} = 1$、$g_{0\mu} = 0$　←つねにこのようにできる。等方モデルのときは同期化されている。）のときは、

$ds^2 = c^2dt^2 - dl^2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & -\gamma_{\mu\nu} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$-g^{\alpha\beta}\gamma_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma$

$-g = g_{00}\,\gamma$　　$\gamma = |\gamma_{\mu\nu}|$

曲線座標では、幾何学的な空間の体積要素は、$\sqrt{\gamma}\ dx^1dx^2dx^3$ であたえられる。

/// Column End

再び、もとにもどって、ここでの最後に、マックスウェルの方程式について。

マックスウェルの方程式を特殊相対論の 4 次元形式にしたものは、すでに定式化しておいた。　page11 参照

$\mathrm{F}_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$　　$(\partial_i = \partial/\partial x^i)$

$\partial_k\mathrm{F}_{ij} + \partial_i\mathrm{F}_{jk} + \partial_j\mathrm{F}_{ki} = 0$

$\partial_j \mathrm{F}^{ij} = -\dfrac{4\pi}{c}\,i^i$　　$\boldsymbol{i}^{(4)} = (c\rho,\ \boldsymbol{i})$　　両辺を ∂x^i で微分すると、$\dfrac{\partial\, i^i}{\partial x^i} = 0$ 保存則（F^{ij} は反対称だから）

一般相対論に移るには、この方程式を共変形に直さなければならない。

$\mathrm{F}_{ij} = A_{j:i} - A_{i:j} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$　で同じ。　$\leftarrow A_{i:k} = \dfrac{\partial A_i}{\partial x^k} - \Gamma^j{}_{ik}A_j$　page23

$\mathrm{F}_{ij:k} + \mathrm{F}_{jk:i} + \mathrm{F}_{ki:j} = \partial_k\mathrm{F}_{ij} + \partial_i\mathrm{F}_{jk} + \partial_j\mathrm{F}_{ki} = 0$　で同じ。　$\leftarrow F_{ij:k} = \dfrac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^l{}_{ik}F_{lj} - \Gamma^l{}_{jk}F_{il}$　、F_{ij} は反対称

$\mathrm{F}^{ij}{}_{:j} = -\dfrac{4\pi}{c}\,i^i$　はどうか。

$\mathrm{F}^{ij}{}_{:j} = \dfrac{1}{\sqrt{-g}}\,\dfrac{\partial(\mathrm{F}^{ij}\sqrt{-g})}{\partial x^j}$　　下欄参照

$\dfrac{\partial(i^i\sqrt{-g})}{\partial x^i} = -\dfrac{c}{4\pi}\,\dfrac{\partial(\mathrm{F}^{ij}\sqrt{-g})}{\partial x^i\,\partial x^j} = 0$　　（F^{ij} は反対称だから）

$i^i{}_{:i} = \dfrac{1}{\sqrt{-g}}\,\dfrac{\partial(i^i\sqrt{-g})}{\partial x^i} = 0$　　下欄参照

これは、電荷の保存則をあたえる。（空間の曲がりによって破られることなく、正確になりたっているのである。）

$\mathrm{F}^{ij}{}_{:j} = \dfrac{\partial\,\mathrm{F}^{ij}}{\partial x^j} + \Gamma^i{}_{jk}\mathrm{F}^{kj} + \Gamma^j{}_{jk}\mathrm{F}^{ik}$　　j、k につき $\Gamma^i{}_{jk}$ は対称、F^{kj} は反対称より、$\Gamma^i{}_{jk}\mathrm{F}^{kj} = 0$

$= \dfrac{\partial\,\mathrm{F}^{ij}}{\partial x^j} + \dfrac{1}{\sqrt{-g}}\,\dfrac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^k}\,\mathrm{F}^{ik}$　　page27 公式参照

$$\therefore \quad \mathrm{F}^{ij}{}_{:j} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\mathrm{F}^{ij}\sqrt{-g}\,)}{\partial x^j}$$

$$i^i{}_{:i} = \frac{\partial i^i}{\partial x^i} + \Gamma^i{}_{ji}\, i^j$$

$$= \frac{\partial i^i}{\partial x^i} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^i}\, i^i$$

$$\therefore \quad i^i{}_{:i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\,i^i\sqrt{-g}\,)}{\partial x^i}$$

ニュートン近似

静的な重力場、静的な座標系を考える。（page46 コラム参照）

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} = 0 & g_{ij}\text{ は時間的に一定} \\ g_{\mu 0} = 0 \quad (\mu = 1, 2, 3) & x^0\text{ を }-x^0\text{ にかえても、}ds\text{ はかわらない} \end{cases}$$

（等方のときも $g_{\mu 0} = 0$ となる。また、どのような重力場でも、$g_{\mu 0} = 0$ とできる。）

$g^{\mu 0} = 0$

$g^{00} = (g_{00})^{-1}$

$\Gamma_{\mu, 0\nu} = 0 \quad (\Gamma_{\mu, \nu 0} = 0)$

$\Gamma^{\mu}{}_{0\nu} = 0 \quad (\Gamma^{\mu}{}_{\nu 0} = 0)$

光速にくらべて、ゆっくり動く質点を考える。

$v^{\mu} = \dfrac{dx^{\mu}}{ds}$　速度　v^0 に比べて、v^{μ} は小

$g_{00} v^0 v^0 \fallingdotseq 1 \qquad \leftarrow \quad g_{ij} v^i v^j = 1 \ (ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j)$

①運動方程式

$$\frac{dv^{\mu}}{ds} = -\Gamma^{\mu}{}_{ij} v^i v^j$$

$$\fallingdotseq -\Gamma^{\mu}{}_{00} v^0 v^0 = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\nu}} v^0 v^0$$

$$\frac{dv^{\mu}}{ds} = \frac{dv^{\mu}}{dx^0}\frac{dx^0}{ds} = \frac{dv^{\mu}}{dx^0} v^0$$

$$\frac{dv^{\mu}}{dx^0} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\nu}} v^0 = g^{\mu\nu} \frac{\partial \sqrt{g_{00}}}{\partial x^{\nu}}$$

こうして、質点があたかも $\sqrt{g_{00}}$ というポテンシャルのなかにいるかのように運動することがわかる。

加速度 $= -\,\mathrm{grad}\, V$

近似的に直角座標系にとってあれば、$g^{\mu\nu}$ の対角要素は、近似的に -1 となる。

②重力法則

重力場が弱くて、空間の曲率は小さいとする。

このとき $g_{ij} v^i v^j$ は、近似的に一定 $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \rightarrow 0$

$R_{ij} = 0$ より $g^{\mu\nu} \dfrac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} = 0$ が導ける。　説明略

スカラー場に対するダランベールの方程式 $g^{ij} V_{:i:j} = 0$（$\Box V = 0$ の共変形）

弱い場の近似　$g^{ij} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial x^j} = 0$

さらに静的な場合　$g^{\mu\nu} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} = 0$

時間の単位を適当にとって、g_{00} を近似的に 1 にすることができる。

$g_{00} = 1 + 2V$　　V は小さい

このようにすると、$\sqrt{g_{00}} = 1 + V$ となり、①、②ともにうまくいく。

こうして、弱くて、静的な重力場の場合は、ニュートンの法則に移行することがわかる。

リーマン時空での積分

ここで扱う e^{ijkl} について

完全反対称で任意の添字の交換に対して符号をかえ、0 でない成分は ± 1 に等しい。 $e^{0123}=+1$ とすると（このとき $e_{0123}=-1$）、$i\,j\,k\,l$ が、偶数個の互換によって $0\,1\,2\,3$ になるか、奇数個の互換で $0\,1\,2\,3$ になるかに従って、$+1$ または -1 に等しい。このような成分の数は、$4\,!=24$ に等しい。したがって、$e^{ijkl}e_{ijkl}=-24$ 。

e^{ijkl} は、座標系の回転に対しては、テンソルのようにふるまうが、座標のうち 1 つまたは 3 つの符号をかえても（反転）、これは符号をかえない。テンソルはかえるので、擬テンソルとよばれる。

ミンコフスキー時空の積分

線積分　dx^i

面積分　$d\boldsymbol{x}$ 、$d\boldsymbol{x}'$ がはる面要素の $x^i x^j$ 座標面への射影面積

$$dS^{ij}=dx^i dx'^j - dx^j dx'^i = \begin{vmatrix} dx^i & dx'^i \\ dx^j & dx'^j \end{vmatrix} \qquad \text{反対称テンソル}$$

$$dS^{*ij}=\frac{1}{2}e^{ijkl}dS_{kl} \qquad dS^{ij}\text{ の対偶テンソル。}$$

大きさが dS^{ij} に等しく、「法線」方向をむいた擬テンソル。

超面積分　$d\boldsymbol{x}$ 、$d\boldsymbol{x}'$ 、$d\boldsymbol{x}''$ がはる超面要素の $x^i x^j x^k$ 座標超面への射影「面積」

$$dV^{ijk}=\begin{vmatrix} dx^i & dx'^i & dx''^i \\ dx^j & dx'^j & dx''^j \\ dx^k & dx'^k & dx''^k \end{vmatrix} \qquad \text{反対称テンソル}$$

$$dV^i=-\frac{1}{6}e^{ijkl}dV_{jkl} \qquad \text{テンソル } dV^{ijk} \text{ に対偶な 4 元ベクトル。}$$

絶対値が超面要素の「面積」に等しく、法線方向をむいたベクトル。

体積積分　$d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ 　　スカラー

ガウスの定理

$$\oint A^i dV_i = \int \frac{\partial A^i}{\partial x^i}d\Omega \qquad dV_i \rightarrow d\Omega\frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$\oint A^{ij}dS^*_{ij} = \int\left(dV_i\frac{\partial A^{ij}}{\partial x^j} - dV_j\frac{\partial A^{ij}}{\partial x^i}\right) \qquad dS^*_{ij} \rightarrow dV_i\frac{\partial}{\partial x^j} - dV_j\frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$= 2\int dV_i\frac{\partial A^{ij}}{\partial x^j} \qquad A^{ij}\text{ は反対称}$$

ストークスの定理（線積分を面積分に変換する）

$$\oint A_i dx^i = \int dS^{ji}\frac{\partial A_i}{\partial x^j} = \frac{1}{2}\int dS^{ji}\left(\frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j}\right) \qquad dx^i \rightarrow dS^{ji}\frac{\partial}{\partial x^j}$$

リーマン時空での積分

$$dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3 = \begin{vmatrix} dx'^0 & & & \\ & dx'^1 & & \\ & & dx'^2 & \\ & & & dx'^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'^0}{\partial x^i}dx^i & & & \\ & \frac{\partial x'^1}{\partial x^i}dx^i & & \\ & & \frac{\partial x'^2}{\partial x^i}dx^i & \\ & & & \frac{\partial x'^3}{\partial x^i}dx^i \end{vmatrix}$$

$= J\,dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ 　のように変換する。

ここで、$J = \left|\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right|$ 　はヤコビアン　　ガリレイ座標では、$J=\pm 1$

$$|g_{kl}| = \left|\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial x'^j}{\partial x^l}g'_{ij}\right|$$

$$g = J^2 g'$$

$$\sqrt{-g} = J\sqrt{-g'}$$

S をスカラーとすれば、

$$\int S\sqrt{-g}\,d\Omega = \int S\,J\sqrt{-g'}\,d\Omega = \int S'\sqrt{-g'}\,d\Omega'$$

これは、$\int S\sqrt{-g}\,d\Omega$ が不変であることを意味している。（$S\sqrt{-g}$　スカラー密度）

ガリレイ座標系では、$d\Omega = dx^0\,dx^1\,dx^2\,dx^3$ はスカラーであったが、曲線座標では $\sqrt{-g}\,d\Omega$ が不変量としてふるまう。

$\int T^{ij\cdots\cdots}\sqrt{-g}\,d\Omega$ は、テンソルになる。（$T^{ij\cdots\cdots}\sqrt{-g}$　テンソル密度）

ただし、積分領域が小さいときのみ。積分領域が小さくないと、テンソルにならない。

ガウスの定理

$$\sqrt{-g}\;d\Omega$$

$$\sqrt{-g}\;dV_i = -\frac{1}{6}\,e_{ijkl}\,dV^{jkl}$$

$$\sqrt{-g}\;dS^*{}_{ij} = \frac{1}{2}\,e_{ijkl}\,dS^{kl}$$

$$dx^i$$

ストークスの定理

ガウスの定理（これらは後述）

$$\int A^i{}_{:i}\sqrt{-g}\,d\Omega = \oint A^i\sqrt{-g}\,dV_i$$

$$\int \mathrm{F}^{ij}{}_{:j}\sqrt{-g}\,dV_i = \oint \mathrm{F}^{ij}\sqrt{-g}\,dS^*_{ij} \qquad \mathrm{F}^{ij} = -\,\mathrm{F}^{ji}\ \text{反対称}$$

ストークスの定理（後述）

$$\frac{1}{2}\int (A_{i:j} - A_{j:i})\,dS^{ij} = \oint A_i\,dx^i$$

【反変ベクトル】

$$A^i{}_{:i} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma^i{}_{ji}A^j = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^i}A^i$$ page30 下欄参照

$$\therefore\quad A^i{}_{:i} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(A^i\sqrt{-g}\,)}{\partial x^i}$$

$\int S\sqrt{-g}\,d\Omega$ で S に $A^i{}_{:i}$ を代入すると、

$$\int A^i{}_{:i}\sqrt{-g}\,d\Omega = \int\frac{\partial(A^i\sqrt{-g}\,)}{\partial x^i}\,d\Omega = \oint A^i\sqrt{-g}\,dV_i \qquad \text{ガウスの定理}$$

もし、$A^i{}_{:i} = 0$ ならば、

$\dfrac{\partial(A^i\sqrt{-g}\,)}{\partial x^i} = 0$ となり、これは保存則をあたえる。

すなわち、$(\underbrace{A^0\sqrt{-g}}_{\text{密度}}\,,\ \underbrace{A^\mu\sqrt{-g}}_{\text{流束}}\,)$ であたえられる流体が、保存されるということである。

実際、$\dfrac{\partial(A^i\sqrt{-g}\,)}{\partial x^i} = 0$ を、時刻 x^0 のきまった３次元体積 V 上で積分すれば、

$$\frac{\partial\int_V A^0\sqrt{-g}\,dx\,dy\,dz}{\partial x^0} = -\int_V\frac{\partial(A^\mu\sqrt{-g}\,)}{\partial x^\mu}\,dx\,dy\,dz = -\oint A^\mu\sqrt{-g}\,dS_\mu$$

V の境界を過ぎる流れがなければ、$\int A^0\sqrt{-g}\,dx\,dy\,dz$ は一定である。

【テンソル】

テンソルの場合はどうか。

平らな空間ならば、$\int Y^{ij}{}_{:i}\,dV_i$ はガウスの定理を使って、表面積分になおせるが、曲がった空間では、一般に、

$\int Y^{ij}{}_{:i}\sqrt{-g}\,dV_i$ を表面積分になおすことはできない。

その例外は、反対称テンソル $F^{ij} = -F^{ji}$ の場合である。

この場合には、

$$F^{ij}{}_{:j} = \frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j} + \Gamma^i{}_{jk} F^{kj} + \Gamma^j{}_{jk} F^{ik}$$ page29 下欄参照

$$= \frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^k} F^{ik}$$

$$\therefore \quad F^{ij}{}_{:j} \sqrt{-g} = \frac{\partial (F^{ij}\sqrt{-g})}{\partial x^j}$$

$$\int F^{ij}{}_{:j} \sqrt{-g}\, dV_i = \int \frac{\partial (F^{ij}\sqrt{-g})}{\partial x^j} dV_i = \oint F^{ij} \sqrt{-g}\, dS^*_{ij}$$ ガウスの定理

もし、$F^{ij}{}_{:j} = 0$ なら、保存則がなりたつことになるのである。

対称テンソル $Y^{ij} = Y^{ji}$ の場合

一方の添字をひきおろして、$Y_i{}^j{}_{:j}$ をあつかうことにすれば、似た式がかける。

$$Y_i{}^j{}_{:j} = \frac{\partial Y_i{}^j}{\partial x^j} - \Gamma_{k,ij} Y^{kj} + \Gamma^j{}_{jk} Y_i{}^k$$ page23 & page20 第二種のクリストッフェル記号定義

$$= \frac{\partial Y_i{}^j}{\partial x^j} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} Y^{kj} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^k} Y_i{}^k$$ $Y^{ij} = Y^{ji}$、page20 ④ $\Gamma_{k,ji} + \Gamma_{j,ik} = \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}$、page27 公式

$$\therefore \quad Y_i{}^j{}_{:j} \sqrt{-g} = \frac{\partial (Y_i{}^j \sqrt{-g})}{\partial x^j} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} Y^{kl} \sqrt{-g}$$

【共変ベクトル】

$$A_{i:j} - A_{j:i} = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \Gamma^k{}_{ij} A_k\right) - \left(\frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \Gamma^k{}_{ji} A_k\right)$$

$$= \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i}$$

つまり、共変カールが、ふつうのカールに等しい。このことは共変ベクトルにおいてのみ成りたつ。

ストークスの定理より、

$$\frac{1}{2} \int (A_{i:j} - A_{j:i})\, dS^{ij} = \oint A_i\, dx^i$$

アインシュタインの方程式

アインシュタインの仮定　page26

からっぽの空間（物質も存在せず、重力場のほかには、どんな物理的な場も存在しないことを意味する）では、

$R^{ij} = 0$ が成り立つ。　　重力の法則

この $R^{ij} = 0$ は、$R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R = 0$ と同等である。

g_{ij} をかけると、$R - \frac{1}{2} R = 0$ で $R = 0$

すなわち、$R^{ij} = 0$ になる。

物質が存在するところでは、$R^{ij} = X^{ij}$ あるいは、$R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R = Y^{ij}$ としよう。

ビアンキの恒等式があるので、後者が便利だろう。

ビアンキの恒等式　$(R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R)_{:j} = 0$

$Y^{ij}{}_{:j} = 0$

係数をつけて、$R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R = 8\pi Y^{ij}$ としておくのがよい。（後述）

こうしておくと、Y^{ij} は（非重力的な）エネルギーと運動量の密度ならびに流束と解釈される。

Y^{i0} が密度、$Y^{i\mu}$ が流束。

$Y^{ij}{}_{:j} = 0$ は、平らな空間でのエネルギーと運動量の保存則 $\frac{\partial Y^{ij}}{\partial x^j} = 0$ に対応している。

物質のエネルギー・運動量テンソル

ある物質分布があって、場所から場所へ速度 $v^i = \frac{dx^i}{ds}$ が<u>連続的に変わっている</u>とする。

スカラー ρ を導入して、ベクトル場 ρv^i が物質の密度と流束（特殊相対論的）をきめるようにすることができる。

これは、i^i（page29）と同様であって、一般相対論では、$\rho v^0 \sqrt{-g}$ が物質の密度、$\rho v^\mu \sqrt{-g}$ が流束になる。

物質の保存は、$\frac{\partial(\rho v^i \sqrt{-g})}{\partial x^i} = 0$ または、$(\rho v^i)_{:i} = 0$ により、あらわせる。（page29）

$(\rho v^i)_{:i} = 0$ より、

$\rho_{:i} v^i + \rho v^i{}_{:i} = 0$

$\frac{\partial \rho}{\partial s} = \frac{\partial \rho}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial s} = \frac{\partial \rho}{\partial x^i} v^i = \rho_{:i} v^i = -\rho v^i{}_{:i}$　　　page23 スカラー S の場合は、$S_{:k} = \frac{\partial S}{\partial x^k}$

これは、ρ が世界線にそって、どうかわるかきめる。

物質のエネルギー・運動量テンソル

$T^{ij} = \rho v^i v^j$　　対称

$T^{ij}\sqrt{-g}$ が、エネルギーおよび運動量の密度と流束をあたえる。

$$\begin{array}{cc} \text{エネルギー密度} & \text{エネルギーの流束} \\ \left(\begin{array}{c} \rho v^0 v^0 \sqrt{-g} \\ \boxed{\rho v^\mu v^0 \sqrt{-g}} \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} \boxed{\rho v^0 v^\nu \sqrt{-g}} \\ \boxed{\rho v^\mu v^\nu \sqrt{-g}} \end{array}\right) \\ \text{運動量の密度} & \text{運動量の流束} \end{array}$$

$T^{ij}{}_{:j} = 0$

$\because\ T^{ij}{}_{:j} = (\rho v^i v^j)_{:j} = (\rho v^j)_{:j} v^i + \rho v^j v^i{}_{:j}$　　　$(\rho v^j)_{:j} = 0$

$= \rho v^j v^i{}_{:j}$

ここで、v^i は1本の世界線で意味をもつだけでなく、さらに、連続的な場として定義されているため、

$\dfrac{dv^i}{ds} + \Gamma^i{}_{jk} v^j v^k = 0$（測地線 page22） かつ $dv^i = \dfrac{\partial v^i}{\partial x^j} dx^j$（場所から場所へと変化する連続的な場）

$$\frac{dv^i}{ds} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \frac{dx^j}{ds} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} v^j$$

$$\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \Gamma^i{}_{jk} v^k\right) v^j = 0$$

$$v^i{}_{:j} v^j = 0$$

page23

$T^{ij}{}_{:j} = 0$ なので、アインシュタインの方程式（物質が存在するとき）を、

$R^{ij} - \dfrac{1}{2} g^{ij} R = k T^{ij}$ とできる。

係数 k をきめよう。ニュートン近似をつかう。

$$R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R = k \rho v^i v^j$$

g_{ij} をかけ縮約すると、$g_{ij} v^i v^j = 1$ ($ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$) および $g^i_i = 4$ より、（page18）

$$-R = k\rho$$

このため、上の式は、

$$R^{ij} = k\rho\left(v^i v^j - \frac{1}{2} g^{ij}\right)$$

$$R_{ij} = \frac{\partial \Gamma^m{}_{ij}}{\partial x^m} - \frac{\partial \Gamma^m{}_{im}}{\partial x^j} + \Gamma^k{}_{ij}\Gamma^m{}_{km} - \Gamma^k{}_{im}\Gamma^m{}_{kj}$$

page26

$$= -\frac{1}{2} g^{mn}\left(\frac{\partial^2 g_{mn}}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{jn}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^j \partial x^n} + \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^m \partial x^n}\right) = k\rho\left(v_i v_j - \frac{1}{2} g_{ij}\right)$$

以下の式を代入し、$\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$ などの2項積は、すべて近似的に 0 とした。

$$\Gamma^m{}_{ij} = g^{mn}\Gamma_{n,ij} = \frac{1}{2} g^{mn}\left(\frac{\partial g_{ni}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{nj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^n}\right)$$

$$\Gamma^m{}_{im} = \frac{1}{2} g^{mn}\left(\frac{\partial g_{ni}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{nm}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{im}}{\partial x^n}\right)$$ 1項と3項は打ち消しあう

$$= \frac{1}{2} g^{mn}\frac{\partial g_{nm}}{\partial x^i}$$

すべて静止した静的場を考え、弱い場の近似をとる。$v^0 = 1$ 、$v^\mu = 0$ 。

さらに、$i = j = 0$ とすると、

上の式 $-\dfrac{1}{2} g^{mn}\left(\dfrac{\partial^2 g_{mn}}{\partial x^i \partial x^j} - \dfrac{\partial^2 g_{jn}}{\partial x^i \partial x^m} - \dfrac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^j \partial x^n} + \dfrac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^m \partial x^n}\right) = k\rho\left(v^i v^j - \dfrac{1}{2} g^{ij}\right)$ は、

$$-\frac{1}{2} g^{\mu\nu}\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = k\rho\left(v^0 v^0 - \frac{1}{2} g^{00}\right) = \frac{1}{2} k\rho$$

$g_{00} = 1 + 2V$ とおいてみると、 page31

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial^2 V}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = -\frac{1}{2} k\rho$$

ポアッソン方程式 $\Box\phi = -4\pi\rho$ 近似的に $g^{\mu\nu}\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = -4\pi\rho$

比較して、$k = 8\pi$

すなわち、アインシュタインの方程式は、

$R^{ij} - \dfrac{1}{2} g^{ij} R = 8\pi\, \rho v^i v^j$ となる。

逆に、$R^{ij} - \dfrac{1}{2} g^{ij} R = 8\pi\, \rho v^i v^j$ を仮定すると、

① 質量の保存

② 質量が測地線にそって動くこと

が導ける。

$(R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R)_{:j} = 0$ だから、

$(\rho v^i v^j)_{:j} = 0$

$(\rho v^j)_{:j} v^i + \rho v^j v^i{}_{:j} = 0$ ―――――――― ※

v_i をかけると、$(\rho v^j)_{:j} = 0$ 質量保存

∵ $g_{ij} v^i v^j = 1$ $(ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j)$ より、

$v^i v_i = 1$

$v_i v^i{}_{:k} = 0$ 、$v^i v_{i:k} = 0$

∵ $(g_{ij} v^i v^j)_{:k} = 0$ 、$g_{ij:k} = 0$ だから、

$2 g_{ij} v^i v^j{}_{:k} = 0$

また、これと ※ から、

$v^j v^i{}_{:j} = 0$

$v^j (\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \Gamma^i{}_{jk} v^k) = 0$ $v^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} = \frac{dx^j}{ds} \frac{\partial v^i}{\partial x^j} = \frac{dv^i}{ds}$

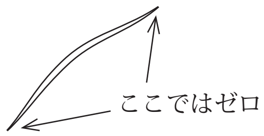
$\frac{dv^i}{ds} + \Gamma^i{}_{jk} v^j v^k = 0$

重力場に対する作用関数

電磁場と同じく、$\int G\sqrt{-g}\,d\Omega$ の形をしているはずである。また、重力場の方程式は、電磁場と同じように、場のポテンシャルの２階より高い導関数を含んではならないという事実をとる。作用の変分をとって（δS）、このような方程式を得るためには、スカラー G は g_{ij} の１階より高い導関数を含まないことが必要である。したがって、G は g_{ij} と $\Gamma^i{}_{jk}$ だけを含むことになる。しかしながら、これだけから不変量をつくることは不可能である。ところが、R というスカラーがあって、これは、２階の導関数をも含んではいるけれども、次のようにして、２階の導関数を変分に対して消すことができる。

$S = \int R\sqrt{-g}\,d\Omega$　　スカラー

最小作用の原理では、積分領域の限界における場の変分はゼロ。
積分境界では、g_{ij} もその１階微分も変化させないような、任意の変分 δg_{ij} に対して $\delta S = 0$ なら、アインシュタインの真空方程式 $R_{ij} = 0$ がでてくる。



証明

$R = g^{ij}R_{ij} = R^* - G^*$

$R^* = -g^{ij}\left(\dfrac{\partial\Gamma^m{}_{im}}{\partial x^j} - \dfrac{\partial\Gamma^m{}_{ij}}{\partial x^m}\right)$　　２階微分を含む

$G^* = -g^{ij}(\Gamma^m{}_{ij}\Gamma^n{}_{mn} - \Gamma^m{}_{in}\Gamma^n{}_{jm})$　　１階微分

$$R^*\sqrt{-g} = -\frac{\partial(g^{ij}\Gamma^m{}_{im}\sqrt{-g})}{\partial x^j} + \frac{\partial(g^{ij}\Gamma^m{}_{ij}\sqrt{-g})}{\partial x^m} + \frac{\partial(g^{ij}\sqrt{-g})}{\partial x^j}\Gamma^m{}_{im} - \frac{\partial(g^{ij}\sqrt{-g})}{\partial x^m}\Gamma^m{}_{ij}$$

最初の２項は、表面積分に直されて、変分に対して消える。
後の２項は、下欄の式を用いて、

$= -g^{jn}\Gamma^i{}_{nj}\Gamma^m{}_{im}\sqrt{-g} - (-2g^{jn}\Gamma^i{}_{nm} + g^{ij}\Gamma^n{}_{mn})\Gamma^m{}_{ij}\sqrt{-g}$

$= 2G^*\sqrt{-g}$

$\therefore\quad \delta S = \delta\int G^*\sqrt{-g}\,d\Omega$

$L = G^*\sqrt{-g}$　　１階微分についての斉次２次
計算が長くなるので省くが、

$$\delta L = -\Gamma^m{}_{ij}\,\delta\frac{\partial(g^{ij}\sqrt{-g})}{\partial x^m} + \Gamma^n{}_{mn}\,\delta\frac{\partial(g^{mj}\sqrt{-g})}{\partial x^j} - (\Gamma^n{}_{im}\Gamma^m{}_{jn} - \Gamma^n{}_{mn}\Gamma^m{}_{ij})\,\delta(g^{ij}\sqrt{-g})$$

最初の２項は、上と同じように形をかえると、結局、

$\delta S = \int R_{ij}\,\delta(g^{ij}\sqrt{-g})\,d\Omega$ となる。　　$R_{ij} = \dfrac{\partial\Gamma^m{}_{ij}}{\partial x^m} - \dfrac{\partial\Gamma^m{}_{im}}{\partial x^j} + \Gamma^n{}_{mn}\Gamma^m{}_{ij} - \Gamma^n{}_{im}\Gamma^m{}_{jn}$

$\delta(g^{ij}\sqrt{-g})$ は任意だから、 $R_{ij} = 0$

さらに、計算をつづけると、

$\dfrac{\partial g}{\partial g_{ij}} = g\,g^{ij}$ 、$\dfrac{\partial g}{\partial g^{ij}} = -g\,g_{ij}$ （page27 公式）より、　$\delta\sqrt{-g} = \dfrac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{ij}\delta g_{ij} = -\dfrac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{ij}\delta g^{ij}$

$\delta S = \int R_{ij}\,\delta(g^{ij}\sqrt{-g})\,d\Omega$

$= \int R_{ij}\,(\delta g^{ij}\sqrt{-g} + g^{ij}\delta\sqrt{-g})\,d\Omega$

$= \int (R_{ij}\,\delta g^{ij}\sqrt{-g} + R\,\delta\sqrt{-g})\,d\Omega$

$= \int \left(R_{ij} - \dfrac{1}{2}g_{ij}R\right)\sqrt{-g}\,\delta g^{ij}\,d\Omega$

$\delta S = 0$ なら $R_{ij} - \dfrac{1}{2}g_{ij}R = 0$

$$\frac{\partial(g^{ij}\sqrt{-g}\,)}{\partial x^k} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k}\sqrt{-g} + g^{ij}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^k}$$

$$= g^{in}g^{jn}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\sqrt{-g} + g^{ij}\Gamma^l{}_{kl}\sqrt{-g} \qquad \Gamma^i{}_{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^k}$$ page27 公式

$$= \{-g^{im}g^{jn}(\Gamma_{m:nk} + \Gamma_{n:mk}) + g^{ij}\Gamma^l{}_{kl}\}\sqrt{-g}$$ page20 ④

$$= (-g^{jn}\Gamma^i{}_{nk} - g^{im}\Gamma^j{}_{mk} + g^{ij}\Gamma^l{}_{kl})\sqrt{-g}$$

k を j とおいて縮合させせると、後者２項は打ち消しあって 0 となる。

$$\frac{\partial(g^{ij}\sqrt{-g}\,)}{\partial x^j} = -g^{jn}\Gamma^i{}_{nj}\sqrt{-g}$$

重力場と他のさまざまな場の作用関数（アインシュタインの方程式の一般形）

任意の場が、任意の数だけあって、重力場と相互作用し、お互いどうし相互作用しているとき、
一般的な作用原理　$\delta S = \delta(S_g + S') = 0$ がたてられる。　S_g は重力場、S' は他のすべての作用

$$\delta S_g = \delta \int L\, d\Omega \qquad L = R\sqrt{-g}$$

$$= \frac{1}{16\pi}\int \left(R^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}R\right)\sqrt{-g}\;\delta g_{ij}\, d\Omega$$

$\delta S' = \delta \int L'\, d\Omega$　　L' は q と $\dfrac{\partial q}{\partial x^i}$、場合によっては、より高次の微分を含む関数である。（ q は何個かある。）

$\delta S = \int (P^{ij}\delta g_{ij} + Q\delta q)\sqrt{-g}\, d\Omega$　という形になる。

$\delta S = 0$　より、
$P^{ij} = 0$
$Q = 0$　　場の方程式　※

P^{ij} は S_g からくる $R^{ij} - \dfrac{1}{2}g^{ij}R$ の項と、L' からくる項の和である。
後者を N^{ij} とおけば、ふつう L' は g^{ij} の微分を含まないから、

$$N^{ij} = \frac{\partial L'}{\partial g_{ij}}$$

こうして、$R^{ij} - \dfrac{1}{2}g^{ij}R - 16\pi N^{ij} = 0$　　アインシュタインの重力場の方程式の一般形
すなわち、それぞれの場が、自分の作用に g_{ij} が含まれるその仕方に応じて、アインシュタインの方程式に一項を寄与するというわけである。
ビアンキの恒等式により、$N^{ij}{}_{:j} = 0$
この関係式があるので、上の ※ という場の方程式がすべて独立というわけにはいかない。

電磁場の作用

一般相対論における電磁場の作用は、（特殊相対論で $\dfrac{1}{16\pi}\int \mathrm{F}_{ij}\mathrm{F}^{ji}d\Omega$ より）

$S = \dfrac{1}{16\pi}\int \mathrm{F}_{ij}\mathrm{F}^{ji}\sqrt{-g}\, d\Omega$　とすべきだろう。　F_{ij} は反対称

$\mathrm{F}_{ij} = A_{j:i} - A_{i:j} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$　（ $\partial_i = \partial/\partial x^i$ ）だから、S は g_{ij} と A_i の微分との汎関数である。

まず、A_i を一定にして、δg_{ij} 変分をとる。このとき F_{ij} は変わらないが、F^{ij} は変わる。

$$\delta(\mathrm{F}_{ij}\mathrm{F}^{ji}\sqrt{-g}) = \left(\frac{1}{2}\mathrm{F}_{ij}\mathrm{F}^{ji}g^{mn} - 2\mathrm{F}^{m}{}_{j}\mathrm{F}^{jn}\right)\sqrt{-g}\;\delta g_{mn} \qquad \text{計算略}$$

$$= -8\pi E^{mn}\sqrt{-g}\;\delta g_{mn}$$

$$E^{mn} = \frac{1}{4\pi}\left(\mathrm{F}^{m}{}_{j}\mathrm{F}^{jn} - \frac{1}{4}g^{mn}\mathrm{F}_{ij}\mathrm{F}^{ji}\right) \qquad \text{対称}$$

E^{mn} は、電磁場の応力エネルギーテンソル

つぎに、g_{ij} を固定しておき、δA_i をとる。

$$\delta(\mathrm{F}_{ij}\mathrm{F}^{ji}\sqrt{-g}) = 2F^{ji}\sqrt{-g}\;\delta F_{ij}$$

$$= 4F^{ji}\sqrt{-g}\;\delta\frac{\partial A_j}{\partial x^i} \qquad \text{部分積分をつかって変形}$$

$$= 4\frac{\partial(F^{ji}\sqrt{-g}\,\delta A_j)}{\partial x^i} - 4\frac{\partial(F^{ji}\sqrt{-g})}{\partial x^i}\delta A_j$$

最初の 1 項は、表面積分に直されて、
変分に対して消える。

$$= -4F^{ji}{}_{:i}\sqrt{-g}\;\delta A_j$$

page29

２つを加えれば、変分、δg_{ij} 、δA_i による全体の変分が得られる。

$$\delta S = \int (-\frac{1}{2} E^{mn} \sqrt{-g}\ \delta g_{mn} - \frac{1}{4\pi} F^{ij}{}_{:j} \sqrt{-g}\ \delta A_i\ ) d\Omega$$

物質が連続的に分布している場合の作用

物質の連続的な分布を考え、その速度が場所から場所へと連続的に変わっているとする。（page35 参照）

$$\delta S = \delta(\underset{\text{重力部分}}{S_g} + \underset{\text{物質部分}}{S_m}) = 0$$

これが、重力場に対しては、アインシュタインの方程式（物質が存在する場合の）を与え、物質に対しては、運動の測地線方程式を与える。

各点の速度ベクトル　$v^i = \dfrac{\partial z^i}{\partial s}$

v^i の方向にあって、流量と流速をきめる反変ベクトル　$p^i = \rho v^i \sqrt{-g}$　（ρ はスカラー　$\rho = n_0 m_0$ みたいなもの）
↑ page35 参照

$S_m = -\iint P^0\, dV ds$　　１個の粒子　$S_m = -m_0 \int ds$　　m_0 のかわりに $P^0 dV$ がくる。

$= -\iint \rho v^0 \sqrt{-g}\ dV ds$　　$v^0 ds = dx^0$

$= -\int \rho \sqrt{-g}\ d\Omega$

$= -\int \sqrt{p^i p_i}\, d\Omega$　　$g_{ij} v^i v^j = 1$（$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$）より　$v^i v_i = 1 \ \rightarrow\ \sqrt{p^i p_i} = \rho\sqrt{-g}$

$\delta S_m = -\int \delta\sqrt{p^i p_i}\ d\Omega$　　$\delta\sqrt{p^i p_i} = \dfrac{1}{2\sqrt{p^k p_k}}(p^i p^j \delta g_{ij} + 2 p_i \delta p^i) = \dfrac{1}{2}\rho v^i v^j \sqrt{-g}\ \delta g_{ij} + v_i \delta p^i$

$= -\int (\frac{1}{2}\rho v^i v^j \sqrt{-g}\ \delta g_{ij} + v_i \delta p^i) d\Omega$

$\delta S_g = \dfrac{1}{16\pi}\int (R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R)\sqrt{-g}\ \delta g_{ij}\, d\Omega$

$\delta S = 0$　より、

$-\dfrac{1}{16\pi}(R^{ij} - \dfrac{1}{2} g^{ij} R) + \dfrac{1}{2}\rho v^i v^j = 0$　　アインシュタインの方程式

ビアンキの恒等式より、

$(\rho v^i v^j)_{:j} = 0$

$v^i (\rho v^j)_{:j} + \rho v^j v^i{}_{:j} = 0$　　両辺に v_i をかけると、$v^i v_i = 1$ 、$v^i v_{i:k} = 0$ より、

$(\rho v^j)_{:j} = 0$　　質量保存則

再び、$v^i (\rho v^j)_{:j} + \rho v^j v^i{}_{:j} = 0$ より、

$v^i{}_{:j} v^j = 0$　　測地線の式（page36）

これは、$-\int v_i \delta p^i d\Omega$ からもでてくる。

δS_m は、物質の流れを少し変えることによって得られるものであるから、物質素片のおのおのが、$z^i \rightarrow z^i + \varepsilon^i$ へ微小な ε^i だけずれるとしよう（ z は座標)。

すると、$\delta p^i = \partial_j (p^j \varepsilon^i - p^i \varepsilon^j)$　　コラム参照

δS_m の一部 $= -\int v_i \delta p^i d\Omega$

$= -\int v_i \partial_j (p^j \varepsilon^i - p^i \varepsilon^j) d\Omega$　　部分積分をつかって変形すると、

$= -\int [\partial_j \{ v_i (p^j \varepsilon^i - p^i \varepsilon^j) \} - \partial_j v_i (p^j \varepsilon^i - p^i \varepsilon^j)] d\Omega$

↑表面積分で消える

$$= \int \partial_j v_i (p^j \varepsilon^i - p^i \varepsilon^j) d\Omega$$

$$= \int (\partial_j v_i - \partial_i v_j) p^j \varepsilon^i d\Omega$$

$$= \int (v_{i:j} - v_{j:i}) p^j \varepsilon^i d\Omega$$ page34 共変ベクトル参照

$$= \int v_{i:j} p^j \varepsilon^i d\Omega \qquad v_{j:i} v^j = 0$$ page37

$$= \int v_{i:j} \rho v^j \varepsilon^i \sqrt{-g}\, d\Omega$$

$= 0$ より、 $v^i{}_{:j} v^j = 0$ 測地線

粒子 1 個

$\delta S_m = - m_0 \delta \int_a^b ds \qquad ds = \sqrt{dz_i dz^i}$ z^i は座標

$$\delta ds = \frac{1}{2} \frac{\delta (dz_i dz^i)}{ds}$$
$$= \frac{dz_i d\delta z^i}{ds} + \frac{dz^i dz^i}{2ds} \delta g_{ij}$$
$$= u_i d\delta z^i + \frac{u^i dz^j}{2} \delta g_{ij}$$

$$\delta S_m = - m_0 \int_a^b (u_i d\delta z^i + \frac{u^i dz^j}{2} \delta g_{ij})$$

$$\int u_i d\delta z^i = [u_i \delta z^i]_a^b - \int \delta z^i \frac{du_i}{ds} ds$$ 部分積分をつかって変形

↑消える

$$= m_0 \int \frac{du_i}{ds} \delta z^i ds - m_0 \int \frac{u^i dz^j}{2} \delta g_{ij}$$

$\delta S = \delta (S_g + S_m) = 0$ の δz^i 項に関して、

$$\therefore \quad \frac{du_i}{ds} = 0$$

電荷をもつ物質の場合の作用

1 個の粒子の場合、$S_{mf} = - e \int A_i v^i ds$ であるが、電荷をになうものが点状の粒子だとすると、電場に特異点が生じ、困難が多いため、電荷をになう物質が、連続的に分布している場合を考える。（前項にのべたのと同じ。）

（ p^i と同じように）電荷の密度、流れをあらわす j^i を導入する。

$\delta j^i = \partial_j (j^j \varepsilon^i - j^i \varepsilon^j) \qquad j^i = \sigma v^i \sqrt{-g} \qquad v^i = \frac{\partial z^i}{\partial s}$ 　スカラー $\sigma = n_0 e$ のようなもの

$$\delta S_{mf} = - \delta \iint j^0 A_i v^i dV ds$$
$$= - \delta \int \sigma v^0 A_i v^i \sqrt{-g}\, dV ds$$
$$= - \delta \int \sigma A_i v^i \sqrt{-g}\, d\Omega$$
$$= - \delta \int A_i j^i d\Omega$$
$$= - \int (\delta A_i j^i + A_i \delta j^i) d\Omega$$

$$\int A_i \delta j^i d\Omega = \int A_i \partial_j (j^j \varepsilon^i - j^i \varepsilon^j) d\Omega$$
$$= \int [\partial_j \{ A_i (j^j \varepsilon^i - j^i \varepsilon^j) \} - \partial_j A_i (j^j \varepsilon^i - j^i \varepsilon^j)] d\Omega$$
$$= - \int \partial_j A_i (j^j \varepsilon^i - j^i \varepsilon^j) d\Omega$$
$$= - \int (A_{i:j} - A_{j:i}) j^j \varepsilon^i d\Omega$$
$$= - \int \mathrm{F}_{ji} j^j \varepsilon^i d\Omega$$

$$= - \int (\delta A_i j^i - \mathrm{F}_{ji} j^j \varepsilon^i) d\Omega$$

系全体　$\delta S = \delta(S_g + S_m + S_f + S_{mf}) = 0$

重力場　物質　電磁場　電荷（電磁場との相互作用）

δg_{ij} の項に関しては、

$$-(R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R) + 8\pi\rho v^i v^j + 8\pi E^{ij} = 0$$

↑物質のエネルギーテンソル

↑電磁場の応力エネルギーテンソル

δA_i の項は、$-j^i - \frac{1}{4\pi} \mathrm{F}^{ij}{}_{:j} = 0$

$\therefore\ \mathrm{F}^{ij}{}_{:j} = -4\pi j^i$　マックスウェルの方程式

ε^i の項は、$\rho v_{i:j} v^j + \mathrm{F}_{ji} j^j = 0$

これは、ローレンツ力であって、これが物質素片の軌跡を測地線からそらせることがわかる。

これは、ビアンキの恒等式をつかって、δg_{ij} の項からもでてくる。　$(\rho v^i v^j + E^{ij})_{:j} = 0$

このことは、作用原理からでてくる方程式が、全部は独立ではないことを意味している。

Column //

$\delta p^i = \partial_j(p^j \varepsilon^i - p^i \varepsilon^j)$　について

$p^0 dx^1 dx^2 dx^3$ は、ある時刻に体積要素 $dx^1 dx^2 dx^3$ のなかにある物質の量をあらわす。

$p^1 dx^0 dx^2 dx^3$ は、時刻 dx^0 のあいだに面積要素 $dx^2 dx^3$ を通過して流れる物質の量。

物質は保存されるので、$\partial_i p^i = 0$　　$p^i = \rho v^i \sqrt{-g}$

$z^i \to z^i + \varepsilon^i$ としたとき、各点 z^i の p^i はどのようにかわるであろうか。

最初、$\varepsilon^0 = 0$ としてみる。

ある３次元体積 V に含まれる物質量の増加は、V の境界を通過してずれでた量の符号を変えれば得られる。

つまり、$\delta \int_V p^0 dV = -\int p^0 \varepsilon^\mu dS_\mu$　　dS_μ は、V の境界面積素片　$\mu = 1$、2、3

この右辺を、ガウスの定理によって体積積分に直せば、

$\delta p^0 = -\partial_\mu(p^0 \varepsilon^\mu)$

これを $\varepsilon^0 \neq 0$ の場合まで一般化してみる。

それには、「もし、ε^μ が p^μ に比例していたら物質素片はそれぞれの世界線にそってずれるだけであり、したがって p^μ は変わらない」という条件を利用する。

すると、$\delta p^0 = \partial_\mu(p^\mu \varepsilon^0 - p^0 \varepsilon^\mu)$

というのは、これは $\varepsilon^0 = 0$ のとき $\delta p^0 = -\partial_\mu(p^0 \varepsilon^\mu)$ に一致し、他方 ε^μ が p^μ に比例しているとき $\delta p^0 = 0$ をあたえるからである。

他の成分についても同様に考えると、$\delta p^i = \partial_j(p^j \varepsilon^i - p^i \varepsilon^j)$

// Column End

重力波

からっぽの空間のなかで、重力場が弱く、g_{ij} がほとんど一定という領域を考える。

$$-R_{kl} = \frac{1}{2} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{lj}}{\partial x^k \partial x^i} - \frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial x^l \partial x^j} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^j} \right) = 0$$

調和座標を使うことにする。（下欄参照）

$$g^{ij} \Gamma^a{}_{ij} = 0$$

a を下に下げ、$\Gamma_{k,ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right)$ より、

$$g^{ij} \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) = 0$$

これを x^l で微分し、微分について２次の項を省略するなら、

$$g^{ij} \left(\frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} \right) = 0$$

これと、i と j 、k と l を交換したものと、上の $-R_{kl} = 0$ の式を加えると、

$g^{ij} \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^j} = 0$ を得る。

つまり、各 g_{kl} が、ダランベールの方程式をみたす。

その解は、光速で伝播する波動からなる。これが、重力波にほかならない。

調和座標

スカラー場 V に対するダランベールの方程式（波動方程式）$\Box V = 0$ の共変な形は、$g^{ij} V_{:i:j} = 0$ である。

これは、$g^{ij} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k{}_{ij} \frac{\partial V}{\partial x^k} \right) = 0$

もし、空間が平らで、直線座標を使っているなら、各座標 x^a は $\Box x^a = 0$ を満たす。

これを、上の式に入れてみると、

$g^{ij} \Gamma^a{}_{ij} = 0$ となる。

これは特別な座標でなりたつだけであり、いいかえると、この方程式は、座標系を制限する条件になる。この座標系は、曲がった空間では、直線座標系にもっとも近いものである。あまり使って便利な場合はないが、重力波をあつかう場合には、非常に役立つ。

シュヴァルツシルトの解

からっぽの空間に対するアインシュタイン方程式が、すでに非線形であって、いりくんでおり、容易には解が得られない。しかし、ひとつだけ特別な場合があって、わりと簡単に解がだせる。それは、静止した球対称な物体がつくる静的で球対称な場である。

静的という条件は、静的な座標系を使えば、g_{ij} が時間 x^0（すなわち t）によらず、また $g_{0\mu} = 0$ （$\mu = 1, 2, 3$）になるということである。（以下の展開を含めてコラム参照）

空間座標を極座標 $x^1 = r$ 、$x^2 = \theta$ 、$x^3 = \varphi$ とする。
球対称と両立するもっとも一般的な ds^2 の形は、
$ds^2 = U dt^2 - V dr^2 - W r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$ である。ただし、U 、V 、W は r のみの関数とする。
ところで、座標 r であるが、これは r のどんな関数に置きかえても球対称をこわすことはない。この自由度を利用して事柄をできるだけ簡単にする。
もっとも便利なのは、$W = 1$ とすることである。すると、
$ds^2 = e^{2\nu} dt^2 - e^{2\lambda} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$ 　　ν 、λ は r のみの関数

g_{ij} の値をこれから読みとると、
$g_{00} = e^{2\nu}$ 、$g_{11} = -e^{2\lambda}$ 、$g_{22} = -r^2$ 、$g_{33} = -r^2 \sin^2\theta$
そして、$g_{ij} = 0$ 　（$i \neq j$ に対し）
したがって、
$g^{00} = e^{-2\nu}$ 、$g^{11} = -e^{-2\lambda}$ 、$g^{22} = -r^{-2}$ 、$g^{33} = -r^{-2} \sin^{-2}\theta$
そして、$g^{ij} = 0$ 　（$i \neq j$ に対し）

クリストッフェル記号を計算すると、その多くは 0 になる。0 にならないのは、
（r による微分をダッシュで表し、$\Gamma^k{}_{ij} = \Gamma^k{}_{ji}$ の一方のみを書く。）
$\Gamma^1{}_{00} = \nu' e^{2\nu-2\lambda}$ 、$\Gamma^0{}_{10} = \nu'$ 、$\Gamma^1{}_{11} = \lambda'$ 、$\Gamma^2{}_{12} = \Gamma^3{}_{13} = r^{-1}$
$\Gamma^1{}_{22} = -r e^{-2\lambda}$ 、$\Gamma^3{}_{23} = \cot\theta$ 、$\Gamma^1{}_{33} = -r \sin^2\theta\, e^{-2\lambda}$ 、$\Gamma^2{}_{33} = -\sin\theta \cos\theta$

リッチテンソルは、
$R_{00} = (-\nu'' + \lambda'\nu' - \nu'^2 - \dfrac{2\nu'}{r}) e^{2\nu-2\lambda}$
$R_{11} = \nu'' - \lambda'\nu' + \nu'^2 - \dfrac{2\lambda'}{r}$
$R_{22} = (1 + r\nu' - r\lambda') e^{-2\lambda} - 1$
$R_{33} = R_{22} \sin^2\theta$
R_{ij} の他の成分は、0 である。

からっぽの空間では、$R_{ij} = 0$ だから、
$R_{00} = 0$ 、$R_{11} = 0$ より、$\lambda' + \nu' = 0$
ところが、r の大きいところでは空間は近似的に平らになるはずであるから、λ も ν も $r \to \infty$ でゼロに近づく。
したがって、$\lambda + \nu = 0$
すると、$R_{22} = 0$ より、$(1 + 2r\nu') e^{2\nu} = 1$
すなわち、$(re^{2\nu})' = 1$
したがって、$re^{2\nu} = r - 2m$ 　　m は積分定数
こうして、$g_{00} = 1 - \dfrac{2m}{r}$

r の大きいところでは、ニュートン近似がなりたつはずである。
これを「ニュートン近似」（page31）でみた $g_{00} = 1 + 2V$ と比べてみると、m は、中心にあって重力場をつくりだしている質量とみなすべきであることがわかる。

解をすっかり書き下せば、
$ds^2 = (1 - \dfrac{2m}{r}) dt^2 - (1 - \dfrac{2m}{r})^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$ 　　Schwarzschild の解

これは、物質のないところ、すなわち重力場をつくりだす物体の外側でなりたつもので、星の表面から外の重力場をかなり正確に表す。例えば、太陽に最も近い水星の運動が、ニュートン理論からわずかにずれることをみごとに説明する。

Column //

中心に集中した質量がつくりだす静的で球対称な重力場 ――――――

原点から無限遠に離れていくとミンコフスキー時空になるので、まず、重力場がない場合の直交座標でのメトリック（計量テンソル）と線素（不変間隔）は、

$(g_{ij})=(1, -1, -1, -1)$ 　　対角成分表示

$ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$

これを極座標表示にすると、

$(g_{ij}) = (1, -1, -r^2, -r^2 \sin^2\theta)$

$ds^2 = (cdt)^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2$ 　　$x^0 = ct,\ x^1 = r,\ x^2 = \theta,\ x^3 = \varphi$

次に、重力場がある場合はどうなるか。

《静的であるとは》

時間独立であると同時に時間反転に対しても不変であることを意味する。時間反転 $dx^0 \Rightarrow -dx^0$ のもとで不変であるという条件をつけることで、線素において dt と他の成分が混ざるような部分は 0 にならなければならないという制限がかかり、g_{i0} は 0 になる。

《球対称とは》

$d\theta, d\varphi$ は立体角部分をあらすようになっており、なおかつ角度を $d\theta \Rightarrow -d\theta$、$d\varphi \Rightarrow -d\varphi$ のようにしても線素は不変でなければならない。したがって、$d\theta d\varphi$, $d\theta rd$ のような項がでてきてはならないことになり、これらから計量テンソルは対角成分のみになる。

こうして静的かつ球対称ということから、重力場がある場合でもメトリック成分は対角成分のみになり、r だけの関数にできる。

$(g_{ij}) = (A(r), -B(r), -C(r)\, r^2, -D(r)\, r^2 \sin^2\theta)$ 　　A, B, C, D は r の関数

$ds^2 = A c^2 dt^2 - (B\, dr^2 + C r^2 d\theta^2 + D r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2)$

C, D は等方性（回転変換に対して変化しない）によって同じものになる（$\theta = 0$ と $\theta = \pi/2$ で対応がとれる)。

$ds^2 = A c^2 dt^2 - B\, dr^2 - C(r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2)$

さらに、動径 r の選択によって $C = 1$ という状況をつくることができる。

（$r' = C^{1/2} r$ とおいてみると、$B\, dr^2 = B' dr'^2$ となる。)

あらたに書きなおして、

$ds^2 = A c^2 dt^2 - B\, dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$

ここで残っている未知関数 $A = e^{2\nu(r)}$ 、$B = e^{2\lambda(r)}$ をのようにする。計量テンソルの符号の関係 A 、B は正なのでこのように置いて問題ない。

$ds^2 = e^{2\nu(r)} dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$

// Column End

ブラック・ホール

シュヴァルツシルトの解　$ds^2 = (1 - \frac{2m}{r})dt^2 - (1 - \frac{2m}{r})^{-1}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$　は、$r = 2m$ に特異点をもつ。そこでは、$g_{00} = 0$、$g_{11} = \pm\infty$ となるのである。m は、重力場をつくりだしている中心に集中した質量である＝とみなせた。では、$r = 2m$ の r は、どのような特異点（境界）といえるのであろうか。

シュヴァルツシルト場で中心の物体に向かって一直線に落下する質点を考えてみる。　前節参照

その速度ベクトルを $v^i = \frac{dx^i}{ds}$ とする。一直線に落下するので、$v^2 = v^3 = 0$ 。

質点の運動は、測地線の式で決定されるので、

$$\frac{dv^0}{ds} = -\Gamma^0{}_{ij}v^i v^j$$

$$= -g^{0l}\Gamma_{l,ij}v^i v^j = -g^{00}\Gamma_{0,ij}v^i v^j = -g^{00}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1}v^0 v^1 = -g^{00}\frac{dg_{00}}{ds}v^0$$

$$\Gamma^i{}_{jk} = g^{il}\Gamma_{l,jk}$$

g_{ij} が時間 x^0 によらず、また $g_{0\mu} = 0$、$g^{0\mu} = 0$　$(\mu = 1, 2, 3)$

$$\Gamma_{i,jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right)$$

$$\frac{dg_{00}}{ds} = \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}\frac{dx^i}{ds} = \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}v^i = \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0}v^0 + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1}v^1 = \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1}v^1 \quad \leftarrow \quad v^2 = v^3 = 0$$

$g^{00} = \frac{1}{g_{00}}$　（$g_{ij}g^{jk} = \delta^k_i$ より）なので、

$$g_{00}\frac{dv^0}{ds} + \frac{dg_{00}}{ds}v^0 = 0$$

積分すると、$g_{00}v^0 = k$　　k は定数で、質点が落ちはじめるときの g_{00} の値に等しい。

g_{00} は対角的であり（前節参照）、$v^2 = v^3 = 0$ だから、

$1 = g_{ij}v^i v^j = g_{00}v^0 v^0 + g_{11}v^1 v^1$

これに g_{00} をかけ、前節の $\lambda + \nu = 0$、$g_{00} = e^{2\nu}$、$g_{11} = -e^{2\lambda}$ → $g_{00}g_{11} = -1$ より、

$$k^2 - (v^1)^2 = g_{00} = 1 - \frac{2m}{r}$$

落下のときは、$v^1 < 0$ であるから、

$$v^1 = -(k^2 - 1 + \frac{2m}{r})^{1/2}$$

$$\frac{dt}{dr} = \frac{v^0}{v^1} = -k(1 - \frac{2m}{r})^{-1}(k^2 - 1 + \frac{2m}{r})^{-1/2}$$

質点が臨界半径に近づいたとして、$r = 2m + \varepsilon$、ε は充分小さいとする。

その２乗を省略すると、

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{2m}{\varepsilon} = -\frac{2m}{r - 2m}$$

これを積分すると、

$$t = -2m\log(r - 2m) + const$$

$r \to 2m$ で、$t \to \infty$ となることがわかる。つまり、質点が臨界半径 $r = 2m$ に着くまでには無限の時間がかかることになる。

ここで、この質点とともに移動している観測者がいるとすればどうだろうか。

この観測者の時間は ds であるから、

$\frac{ds}{dr} = \frac{1}{v^1} = -(k^2 - 1 + \frac{2m}{r})^{-1/2}$ となり、これは $r \to 2m$ のとき、$-k^{-1}$ に収束する。

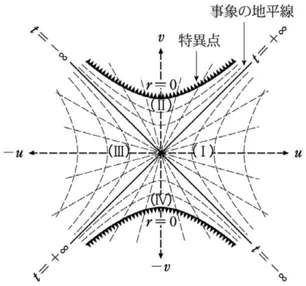
つまり、有限の時間に臨界半径 $r = 2m$ に到着するのである。

巨星の終末などで大量の物質がつぶれてきわめて小さい半径になったとき、重力崩壊は極限まですすんでいくことになる。外部の観測者の時計では無限の時間がかかるように見えるが、崩壊していく物質自身からすれば有限の時間でしかない。ついに、臨界半径を超えたとき、この内と外の交信は一切不可能となる。その境界を超えるには、無限の時間を要することとなるのだ。もはや $r < 2m$ の知見はもち得ない。このような領域は、ブラック・ホールとよばれる。（1971 年、「はくちょう座Ｘ－１」で最初のブラックホールが発見された。）

Column //

電荷をもたない球対称ブラックホール時空を表すシュバルツシルト解では、事象の地平面で計量（メトリック）のある成分が無限大になってしまい、一見事象の地平線で時空の特異点であるかのように見え、シュバルツシルト特異点と呼ばれたこともあった。

しかしその後、地平面で発散しない座標系（クルスカル図を参照）が見つかり曲率が発散する真の特異点ではないことがわかった。実際には事象の地平面で時空の曲率は無限大にならず、事象の地平面は特異点ではない。1960 年、クルスカル（M. Kruscal）とセケレス（Q. Szekers）は独立に、この時空に対して事象の地平面でメトリックのあらゆる成分が無限大にならないような座標系を見出した（クルスカル・セケレス座標系は、t と r を新しい時間 T と半径 R に置き換えた座標系として定義される）。この座標系に基づいてつくられた時空図をクルスカル図、またはクルスカル - セケレス図という。



この座標系では事象の地平線では光の世界線は時空の至るところで ±1 の傾きをもち、因果関係が見やすくなっている。また、この座標系ではブラックホール時空を表すばかりでなく、ホワイトホール時空も同時に表す。この座標は解析接続できて事象の地平線の外側に 2 つの漸近的に平坦な領域が存在する。この時空図で表される時空を、「極大拡大されたシュバルツシルト時空」という。

http://astro-dic.jp/kruscal-coordinates/

// Column End

宇宙項

http://kamusabia.com/einstein-ippansotaiseiriron-utyuko-botyo-kasoku-chikara-darkenergy/ より

一般相対性理論によると、質量が大きく重い物体が存在すると、その重力によって時空は歪んで曲がることになるため、無数の星々が存在する宇宙の時空は、次第に自分自身の重力によって収縮していくことになります。こうして閉じてられていく時空にはさらに強い重力が働くことになるため、最後には完全に潰れて、ブラックホールになってしまうというシナリオが描けます。（もしも宇宙に物質だけしか存在しないと、宇宙は重力によって収縮して潰れてしまうことになります。）

アインシュタインは「宇宙は静的でなければならない」と考えていたので、このような事態を避けるため、宇宙を静止させておくための「宇宙項（宇宙定数）」と呼ばれるものを付け加えました（1917 年)。「宇宙項（宇宙定数)」は、正負の符号によっては、重力に対する反重力（万有斥力）として機能するものであり、万有引力をちょうど相殺する万有斥力ということになります。つまり、宇宙には普遍的に反発しあう力（万有斥力）が存在することを意味します。

$R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R + \Lambda g^{ij} = 16 \pi N^{ij}$　　Λ の入っている項が宇宙項で、Λ は宇宙定数と呼ばれる。

これには、ラグランジアンに $L_c = c\sqrt{-g}$ なる項を付け加えればよい。c は適当な定数。

しかし 1920 年代後半に ハッブルの法則 が発見され、宇宙は静的ではない＝膨張していることがわかりました。宇宙を静的に保つ必要がなくなれば、宇宙項を導入した正当な理由もなくなってしまいます。アインシュタインはこの発見を聞き「宇宙項を方程式の中に入れたのは人生最大の過ちであった」と語ったといいます。そしてその後しばらくは、宇宙項はその存在を忘れ去られることとなりました。

さて、天文学が進展してくると今度は「 宇宙が膨張していることは確かだが、一定の速さで膨張しているのか、それとも減速し、いずれは収縮に転じるのか、あるいはこの膨張は加速度的なものなのか」ということが問題になってきます。1998 年頃に発表された、遠方で起こった超新星爆発の観測結果によると、どうやら現在の宇宙は加速膨張しているらしいということがわかってきたのです。この結果は，WMAP 衛星の観測した宇宙背景放射が出した宇宙論パラメータの値などとも一致しています。

ところが、宇宙が加速膨張しているとなると、何が宇宙膨張を加速させているのかということになります。もし宇宙がビッグバンによって始まり、そのせいで膨張しているのだとすれば、減速こそすれ加速する理由がないからです。ここで復活してくるのが宇宙項です。宇宙膨張の様子を記述する方程式にフリードマン方程式というものがありますが、この式によれば、宇宙が加速膨張するためには宇宙定数を含む項の存在が必要になります。つまり、宇宙の加速膨張という観測結果は、再度、宇宙項に光を当てることとなったのです。そして、最近では、「宇宙項（宇宙定数)」は、「真空のエネルギー」であり、「ダークエネルギー」のことではないかと考えられてきているようです。

現在の標準的な宇宙論では、宇宙は約 137 億年前、時間も空間も物質エネルギーもない「無」の状態から突然誕生したと考えられています。宇宙が誕生した瞬間に実際に何が起きたのかは、まだ正確には分かっていないようですが、生まれたばかりの宇宙には物質は存在しておらず、このミクロの宇宙はわずかな「真空のエネルギー」に満たされていたようです。アインシュタインの一般相対性理論に基づくと、「真空のエネルギー」は互いに反発する力、すなわち斥力が強く働きますので、この斥力によって宇宙は一気に加速度的に膨らみはじめ、急激な大膨張（インフレーション）を引き起こしたと考えられています。そして、急激な大膨張（インフレーション）が終わる頃「真空のエネルギー」は消滅し、熱エネルギーに変わりましたが、これによって宇宙は一気に加熱され、超高温・高圧の「火の玉」状態になったようです。これがいわゆるビッグバンと呼ばれるものであり、この時、現在の宇宙を満たしている物質（正確にはその質量分のエネルギー）も生まれたのだと考えられています。

1990 年代末には、宇宙の膨張を加速させる未知の存在は、「ダークエネルギー（暗黒エネルギー)」と呼ばれるようになりました。宇宙の構成要素のうち、星や銀河など観測できる物質は約４．９％にしか過ぎず、残り約９５．１％のうち、ダークマター（暗黒物質）が約２６．８％、ダークエネルギー（暗黒エネルギー）が約６８．３％になると言われています。

現在の宇宙論研究者たちの間では、「宇宙項（宇宙定数)」は実在しており、宇宙初期の急激な大膨張（インフレーション）を引き起こした「真空のエネルギー」だと考えられているようです。「ダークエネルギー（暗黒エネルギー)」の候補には、「宇宙項（宇宙定数)」の他にも、重力などの４つの基本的な力に加わる第５の力「クインテッセンス（第５元素)」とする見方もあるようですが、もしかしたら、アインシュタインが一度は捨てた「宇宙項（宇宙定数)」が、実は正しかったという可能性もあるようです。